Domande a risposta aperta della prova del 21/02/12

Gianna Stefani

February 24, 2012

0.1 Domanda-5 (Q/R:)

0.1.1: Punti 4

Completare il seguente risultato (formulazione equivalente del teorema degli zeri).
Ipotesi 1. f continua in $A \subset \mathbb{R}$
Ipotesi 2.
Ipotesi 3. f non ha zeri in A
Tesi.

0.1.2: Punti 4

Completare le ipotesi del seguente teorema (formulazione equivalente del teorema degli zeri).
Ipotesi 1.
Ipotesi 2.
Tesi. $f(x_1)f(x_2) > 0$ per ogni x_1, $x_2 \in (a, b)$

0.1.3: Punti 4

Completare le ipotesi del seguente risultato (formulazione equivalente del teorema degli zeri).
Ipotesi 1. A è un intervallo
Ipotesi 2.
Ipotesi 3.
Tesi. $f(x_1)f(x_2) > 0$ per ogni $x_1, x_2 \in A$

0.1.4: Punti 4

Completare la tesi il seguente risultato (formulazione equivalente del teorema degli zeri).
Ipotesi 1. f non ha zeri nell'intervallo I
Ipotesi 2.
Tesi.

0.1.5: Punti 4

Sia f una funzione di classe $C^1((a, b))$. Dare la caratterizzazione di convessità per f in termini di rette tangenti.

0.1.6: Punti 4

Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$. Dare la caratterizzazione di concavità per f in termini di rette tangenti.

0.1.7: Punti 4

Completare il seguente risultato.
Ipotesi 1. f di classe $C^1(A)$
Ipotesi 2.
Ipotesi 3. $x_0 \in A$ è uno zero di f'
Tesi. $f(x_0)$ è il minimo di f in A

0.1.8: Punti 4

Completare il seguente risultato.
Ipotesi 1. f di classe $C^1(A)$
Ipotesi 2.
Ipotesi 3. $x_0 \in A$ è uno zero di f'
Tesi. $f(x_0)$ è il massimo di f in A

0.2 Domanda-6 (Q/R:)

0.2.1: Punti 4

Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\lim_{x\to 0} x \ln(x) = 0$ segue che $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} \ln(x) = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = \sqrt[3]{x}$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.2: Punti 4

Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ segue che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/100}} = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = x/100$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.3: Punti 4

Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\lim_{x\to 0} x \ln(x) = 0$ segue che $\lim_{x\to 0} \sqrt[31]{x} \ln(x) = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = \sqrt[31]{x}$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.4: Punti 4

Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ segue che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/200}} = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = x/200$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.5: Punti 4

Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\lim_{x\to 0} x \ln(x) = 0$ segue che $\lim_{x\to 0} \sqrt[500]{x} \ln(x) =$

0. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = \sqrt[500]{x}$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.6: Punti 4
Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ segue che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/5}} = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = x/5$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.7: Punti 4
Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$ segue che $\lim_{x\to0} \sqrt[300]{x}\ln(x) = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = \sqrt[300]{x}$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.2.8: Punti 4
Seguendo il seguente schema si dimostri che da $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ segue che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x/22}} = 0$. Si consiglia di usare un opportuno cambiamento di variabile, ad esempio $t = x/22$.
Ipotesi. **Tesi**. **Dimostrazione**

0.3 Domanda-7 (Q/R:)

0.3.1: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^{a-1}x(\ln(|x|))^3$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -1/2$ e $a = 1/2$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.2: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^a(\ln(|x|))^3$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -1$ e $a = 2$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.3: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^{a-1}x\,(\ln(|x|))^2$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -1/3$ e $a = 2$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.4: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^a\,(\ln(|x|))^2$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm 1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -3$ e $a = 1/2$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.5: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^{a-1}x(\ln(|x|))^5$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm 1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -1/25$ e $a = 5$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.6: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^a(\ln(|x|))^5$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm 1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -2$ e $a = 2/25$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.7: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^{a-1}x\left(\ln(|x|)\right)^4$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?
2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm 1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -3$ e $a = 4$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.3.8: Al variare del parametro reale a, si consideri la funzione $f\colon x \mapsto |x|^a\left(\ln(|x|)\right)^4$.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione è pari o dispari?

2. Determinare se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$, per $x \to \pm 1$ e per $x \to \pm\infty$.
3. Dimostrare che la funzione è estendibile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.
4. Dimostrare, usando la definizione, che la funzione estesa appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $a > 1$.
5. Determinare gli zeri e il segno della funzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.
6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare: l'estremo superiore ed inferiore di f, l'immagine di f, l'eventuale massimo e minimo di f, gli eventuali asintoti.
7. Disegnare il grafico di f per $a = -3/4$ e $a = 1/4$.
8. **Facoltativo.** Disegnare il grafico di f al variare di $a \in \mathbb{R}$

0.4 Domanda-8 (Q/R:)

0.4.1: Al variare del parametro reale $a \geq 0$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \sin(|x|^a)$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $a \geq 0$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{8 - x^4 + x^6} - 2}$$

0.4.2: Al variare del parametro reale $a \geq 0$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \cos(|x|^a) - 1$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $a \geq 0$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(3 - x^5 - x^8)^3 - 27}$$

0.4.3: Al variare del parametro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \sinh(x^n)$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\cosh(x^{10}) - 1}$$

0.4.4: Al variare del parametro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \cosh(|x|^n) - 1$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\exp(x^{25}) - 1}$$

0.4.5: Al variare del parametro reale $a \geq 0$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \sin(|x|^a)$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $a \geq 0$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8 - x^4 + x^6} - 2}{f(x)}$$

0.4.6: Al variare del parametro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \sinh(x^n)$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x^{10}) - 1}{f(x)}$$

0.4.7: Al variare del parametro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \cosh(|x|^n) - 1$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^{25}) - 1}{f(x)}$$

0.4.8: Al variare del parametro reale $a \geq 0$ calcolare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione definita da $f(x) = \cos(|x|^a) - 1$ e se ne deduca l'andamento locale vicino a zero. Inoltre, al variare di $a \geq 0$, calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3 - x^5 - x^8)^3 - 27}{f(x)}$$