Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica I
Registro delle lezioni del secondo semestre
A.A 2011/2012

Gianna Stefani

Indice

Capitolo 1

Integrale di Riemann

L'argomento viene trattato seguendo prevalentemente il testo di riferimento. Quando il modo di trattare l'argomento è analogo a quello del libro, viene riportato solo l'argomento.

1.1 12-16/03/12. Par. 8.1 - 8.4

1.1.1 Lunedí 12/03/12, lez. 1-2.

1. Introduzione: il metodo di esaustione per il calcolo delle aree, vedi anche Cap.1.

2. Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato.

3. Somma inferiore e superiore associata ad una partizione per una funzione limitata su un intervallo limitato.

4. Il caso delle funzioni positive: somma superiore (inferiore) come area del plurirettangolo circoscritto (inscritto) al grafico della funzione.

5. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato. *Per l'integrale di Riemann useremo preferibilmente la notazione $\int_{[a,b]} f$, riservando le altre notazioni per l'integrale orientato.* Esempi: funzioni costanti, funzione segno, funzione di Dirichlet.

6. Criterio di integrabilità basato sulla differenza fra somma inferiore e superiore associate ad una stessa partizione (senza dimostrazione).

7. Il seguente risultato non è esplicitamente dato nel testo di riferimento, ma è utile per semplificare il linguaggio.

   Lemma 1.1.1 (senza dimostrazione)**.** *L'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un* **numero finito** *di valori.*

   Come conseguenza si può considerare anche l'integrale di una funzione definita su un intervallo eccetto uno o piú punti, purché limitata. Ad esempio $\int_{[-1,1]} \frac{|x|}{x} dx = \int_{[-1,1]} \operatorname{sgn}(x) dx$

8. Notazione $\mathcal{R}(a, b)$. Per il precedente lemma, non è necessario che $f \in \mathcal{R}(a, b)$ sia definita su tutto $[a, b]$, ma in ogni caso deve essere limitata.

9. Classi di funzioni integrabili su un intervallo limitato (senza dimostrazione):

   - funzioni limitate e monotone,

- funzioni continue sull'intervallo chiuso, quindi per il Lemma 1.1.1 anche le funzioni estendibili per continuità ad un intervallo chiuso
- funzioni limitate e continue eccetto un numero finito di punti, esempio: la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0,1]$.

1.1.2 Martedí 13/03/12, lez. 3-4

1. Teorema 8.9: proprietà dell'integrale (senza dimostrazione):
   - Linearità dell'integrale: l'insieme $\mathcal{R}(a,b)$ delle funzioni integrabili su $[a,b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f \in \mathcal{R}(a,b) \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ è lineare.
   - Additività rispetto all'intervallo.
   - Monotonia.
   - Continuità: relazione fra gli integrali di f, f^+, f^- e $|f|$.
2. Calcolo di $\int_{[0,1]} x$ e somma dei primi n numeri naturali.
3. Definizione di area del *trapezoide* definito da una funzione non negativa f integrabile secondo Riemann su un intervallo $[a,b]$, cioè la parte di piano compresa fra il grafico di f l'asse x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$. In questa definizione non si tiene conto dell'unità di misura che deve essere inglobata nella definizione delle coordinate cartesiane.
4. Area del *trapezoide* definito da una funzione non positiva.
5. Relazione fra integrale ed area: il caso generale. *Si sottolinea che l'area di una figura piana è sempre un numero positivo o eventualmente nullo (nel caso di linee) e che, nel caso di una funzione che cambia segno, $\int_{[a,b]} f$ è la differenza fra l'area del trapezzoide associato a f^+ e l'area del trapezzoide associato ad f^-. Inoltre l'area del trapezzoide associato ad f è data da $\int_{[a,b]} f^+ + \int_{[a,b]} f^- = \int_{[a,b]} |f|$*
6. Teorema della media integrale con dimostrazione. Particolare attenzione va posta alla formulazione e alla dimostrazione del caso di funzioni continue.
7. Integrale orientato: definizione.
$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int_{[b,a]} f & a > b \end{cases}$$
   Esercizio . Determinare quali delle precedenti proprietà dell'integrale di Riemann si estendono all'integrale orientato, in particolare si verifichi che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a,b,c \in I$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
8. Relazione fra integrale orientato e area.
9. Funzioni integrali di $f \in \mathcal{R}(a,b)$: definizione e loro continuità.

Esercizi 1.1.1. *Usando la relazione fra integrale ed area e le proprietà dell'integrale, calcolare i seguenti integrali*

1. $\int_{[-2,1]} x\,dx$. Svolgimento. *Applicando le precedenti proprieta' (quali?) si ottiene:* $\int_{[-2,1]} x\,dx = -\int_{[-2,0]} -x\,dx + \int_{[0,1]} x\,dx$, *quindi per la relazione fra integrale ed area si ottiene che l'integrale vale* $-4/2 + 1/2 = -3/2$

2. $\int_{[-1,1]} 5\sqrt{1-x^2}\,dx$. Svolgimento. *Applicando le precedenti proprieta' (quali?) si ottiene:* $\int_{[-1,1]} 5\sqrt{1-x^2}\,dx = 5\int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,dx$.
   Il grafico $y = \sqrt{1-x^2}$ *rappresenta una semicirconferenza di raggio* 1 *contenuta nel semipiano positivo delle ordinate, quindi per la relazione fra integrale ed area si ottiene che l'integrale vale* $5\pi/2$

3. *Disegnare la funzione definita da* $f\colon x \in [0,3] \mapsto \begin{cases} -4x & x \in [0,1] \\ \sqrt{3-x^2+2x} & x \in (1,3] \end{cases}$ *e determinare* $\int_{[0,3]} f(x)\,dx$. Svolgimento: *si riportano solo i principali passaggi che lo studente è tenuto a giustificare:*
   $\int_{[0,3]} f(x)\,dx = -4\int_{[0,1]} x\,dx + \int_{[1,3]} \sqrt{3-x^2+2x}\,dx = -4/2 + \pi/4 = \pi/4 - 2.$

4. $\int_0^\pi \cos(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx + \int_{\pi/2}^\pi \cos(x)dx = 0.$

5. *Usare le proprietà dell'integrale e la relazione fra integrale e area per calcolare* $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ *e* $\int_{-r}^r f(x)dx$, *dove* $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{r^2-x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$.

1.1.3 Mercoledí 14/03/12, lez. 5-6.

1. Estensione della definizione di funzioni integrali al caso di funzioni definite su intervalli qualsiasi. Questa estensione non è data esplicitamente nel testo.

   Lemma 1.1.2. *Sia I un intervallo (**qualsiasi anche illimitato**), $c \in I$ e sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni intervallo $[a,b] \subset I$. Allora la funzione $F_c : x \in I \mapsto \int_c^x f(t)dt$ è continua in I. Inoltre se $c,d \in I$ allora $F_c(x) = F_d(x) + \int_c^d f(t)dt$.*

   Dimostrazione. La funzione è definita su I: infatti comunque si scelga $x \in I$, esistono $a,b \in I$ tali che $c,x \in [a,b]$. Per dimostrare la continuità in x si consideri il caso in cui x non è un estremo di I e si osservi che i precedenti a,b possono essere scelti in maniera che $x \in (a,b)$, inoltre esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a,b]$; se $x+h \in (a,b)$, come applicazione del teorema della media integrale, si ha che $|F(x+h) - F(x)| \le M|h|$. La funzione è quindi continua per ogni x interno ad I. Il caso in cui x è un estremo di I viene lasciato per esercizio. La seconda parte del lemma segue dalla proprietà di additività dell'integrale orientato e si lascia per esercizio.

2. Teorema fondamentale del calcolo nella formulazione del Teorema 8.12 del testo (dimostrazione solo nel caso di funzioni continue nell'intervallo, si veda il successivo Teorema 1.1.1).

3. Estensione del teorema fondamentale del calcolo a funzioni f definite su un intervallo I con la proprietà che $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni intervallo $[a,b] \subset I$. In particolare quando f è continua su I.

   Teorema 1.1.1. *Sia I un intervallo (**qualsiasi anche illimitato**), sia $f \in C^0(I)$ e sia $c \in I$. La funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ è derivabile in I e $F' = f$. Ne segue che $F \in C^1(I)$.*

   Dimostrazione. Vedi testo: è una semplificazione del teorema 9.7 del testo. Per il calcolo del rapporto incrementale si usa il teorema della media integrale per le funzioni continue. Riportiamo i passaggi fondamentali che semplificano la dimostrazione del testo.
   Siano $x, x+h \in I$, usando l'additività dell'integrale e il teorema della media integrale per funzioni continue si ha che esiste un punto $\theta(h)$ nell'intervallo di estremi x e $x+h$ tale che
   $$(F(x+h) - F(x))/h = f(\theta(h)).$$
   Applicando il teorema "dei carabinieri" alla funzione $\theta : h \mapsto \theta(h)$, si ottiene che $\lim\limits_{h \to o} \theta(h) = x$; poiché f è continua, si ha
   $$\lim_{h\to 0} f(\theta(h)) = f(\lim_{h\to 0} \theta(h)) = f(x).$$

4. Studio di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt$, mediante la composizione di β con una funzione integrale: dominio e derivata (con la regola della catena).

Esercizi 1.1.2.

1. *Calcolare il dominio e disegnare il grafico delle funzioni definite da*
$$F : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad G : x \mapsto \int_{-1}^x \frac{1}{t}dt.$$
Inoltre, usando la relazione fra integrale e area e la definizione di integrale orientato, provare che $G(x) = F(-x)$. Suggerimento: *osservare che $t \mapsto 1/t$ è dispari e distinguere i casi $x < -1$ e $x \in (-1,0)$.*

2. *Data la funzione $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, considerare la funzione $F : x \in [-r,r] \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Usando il teorema fondamentale del calcolo disegnare il grafico di F e calcolarne il massimo e il minimo.*
Detta $A(s)$ l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, l'asse y e la retta $x = s$, disegnare il grafico della funzione A e descrivere la relazione fra la funzione F e la funzione A. Studiare la classe di derivabilità sia di F che di A.

3. *Data la funzione $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & se\ x \le 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & se\ x > 0 \end{cases}$, disegnare il grafico della funzione F definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$. Inoltre, usando la relazione fra integrale ed area calcolare $F(2)$ e $F(-2)$.*

4. *Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera. La funzione parte intera è definita da $x \mapsto n$ se $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

5. *Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione $F :\ x \mapsto \displaystyle\int_1^x t\ln(t)dt$.*
In particolare mostrare che il suo dominio è $[0, +\infty)$, che ha un minimo globale in $x = 1$, che ha tangente orizzontale in $x = 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} F(x)dx = +\infty$ (si usi la relazione fra integrale e area e le proprietà dei limiti).

6. *Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione* $G: x \mapsto \int_1^{1/x^2} \ln(t)dt$.
   Usando il cambiamento di variabile $y = 1/x^2$*, la relazione fra integrale e area e le proprietà dei limiti, si dimostri che* $\lim_{x\to 0} G(x)dx = +\infty$. *La funzione* G *ha un asintoto orizzontale, ma ancora non si hanno gli elementi per provarlo, si può comunque provare che la funzione ha limite per* $x \to +\infty$.

7. *Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione* $G: x \mapsto \int_0^{\frac{1}{|x|+1}} e^{t^2} dt$.
   Si mostri anche, usando il Teorema della media integrale, che $\lim_{x\to+\infty} G(x)dx = 0$. *Si può arrivare allo stesso risultato anche con un cambiamento di variabile (quale?)*

1.2 19-23/03/12. Par. 8.5, 8.7.

1.2.1 Lunedí 19/03/12, lez. 7-8.

Esercizi sulle funzioni integrali e cenni sullo studio di funzioni del tipo $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$, con l'esempio di $G: x \mapsto \int_{2x+1}^{\sin x} (2t^2 - 5t + 6)\,dt$.

1. Definizione di primitiva di una funzione f su un intervallo I. Esempi:
   - La funzione cosh è una primitiva della funzione sinh su $\mathbb{R}$.
   - La funzione sgn non ha primitive su $\mathbb{R}$.
   - La funzione ln è una primitiva della funzione $x \mapsto 1/x$ su $\mathbb{R}^+$.
   - La funzione $x \mapsto \ln(-x)$ è una primitiva della funzione $x \mapsto 1/x$ su $\mathbb{R}^-$.
   - **Non si può dire** che la funzione f definita da $x \mapsto \ln(|x|)$ è una primitiva della funzione $g: x \mapsto 1/x$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, anche se $f' = g$ sul loro comune dominio, perché $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo.

2. Interpretazione del Teorema fondamentale del calcolo in termini di primitive.

3. Struttura dell'insieme delle primitive, Teorema 8.14 del testo con dimostrazione.

4. Formula fondamentale del calcolo integrale (Corollario 8.15 del testo), con dimostrazione.

5. **Interpretare la tabella delle derivate delle funzioni "elementari" come esistenza di primitive di funzioni. Ricordarsi di specificare l'intervallo.** Inoltre per ogni funzione stabilire l'insieme delle primitive.

1.2.2 Martedí 20/03/12, lez. 9-10

1. Esercizi e complementi sulle primitive
   - Data la funzione $f: x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ si prova che: $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, f è estendibile per continuità a $x_0 = 0$, la funzione estesa è derivabile su $\mathbb{R}$ e

     $$f': x \mapsto \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

     quindi f estesa non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e f estesa è una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione f' sopra definita.

- Vale il seguente risultato: *una funzione f definita su un intervallo I con una discontinuità di salto in $x_0 \in I$, non ammette primitive in I.*

  Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una primitiva F. F è continua e derivabile in I, quindi posso applicare il teorema sul limite della derivata (vedi il teorema al n.2 delle lezioni del 14/12/11 o il Teorema 7.23 del testo) ed ottengo
  $$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = D^\pm F(x_0)\,,$$
  quindi .... completare la dimostrazione per esercizio.
- Primitive dei polinomi.
- La ricerca di una primitiva su un intervallo è l'esempio più semplice di *equazione differenziale*
  $$y'(x) = f(x) \quad \text{su} \quad I,$$
  cioè la ricerca di una funzione con assegnata derivata. L'incognita è una funzione (indicata con y) e l'equazione coinvolge la funzione incognita e le sue derivate (in questo caso appare esplicitamente solo la derivata prima della funzione). Il risultato sulla struttura delle primitive, dimostra che se la soluzione esiste non è unica, per sceglierne una bisogna assegnare la *condizione iniziale*, cioè il valore della funzione in un punto x_0, detto iniziale.

  Esempio. Equazione differenziale legata al problema della caduta dei gravi lungo la verticale: in un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente e piano terra coincidente col piano $z = 0$, se si lascia cadere un punto materiale da un'altezza z_0, si ottiene l'equazione differenziale con condizioni iniziali
  $$z''(t) = -g \text{ (accelerazione di gravità)}, \quad z'(0) = 0, \quad z(0) = z_0.$$
  Si ottiene per il moto del grave
  $$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_0.$$
  Dopo quanto tempo e a quale velocità il grave tocca terra?

2. La notazione $\int f(x)\,dx$ oppure se non ci sono dubbi sulla variabile $\int f(x)$. Tale notazione viene detta *integrale indefinito della funzione f*. Il libro di riferimento e la maggior parte degli autori per integrale indefinito intendono l'insieme delle primitive di f, o anche una qualsiasi primitiva. Io preferisco dare la seguente definizione, utile alla ricerca di primitive, tenendola separata dal concetto di primitiva stessa per non dover sottolineare ogni volta quale sia l'intervallo di definizione. *Il simbolo $\int f(x)\,dx$ indica una funzione g con la proprietà $g' = f$.* In altre parole ciò che è indefinito è l'intervallo su cui g è una primitiva di f.
   Esempio: $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$ (verificarlo per esercizio), ma $\ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$ è una primitiva di $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ su $(2, +\infty)$ oppure su $(-\infty, 1)$ oppure su $(1, 2)$. Scrivere l'insieme delle primitive di $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ su ciascuno dei precedenti intervalli senza usare il valore assoluto e scrivendo il logaritmo del rapporto come differenza di logaritmi.

Esercizi 1.2.1. *1. Provare la "linearità" dell'integrale indefinito.*

2. Studiare la funzione $F : x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)dt$, dove $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ 3 + x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Calcolare $F(x)$ per ogni x e interpretarlo in termini di aree.

3. *Come determinare, mediante l'integrale, l'area della parte di piano compresa fra il grafico di due funzioni: siano $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ e sia $\mathcal{C}$ la parte del piano limitata dai grafici delle funzioni f, g e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$; allora l'area di $\mathcal{C}$ è data da*
$$\int_a^b (f-g)^+(x)\,dx + \int_a^b (f-g)^-(x)\,dx = \int_a^b |f-g|(x)\,dx$$

4. *Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$ e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa fra il suo grafico e la retta di equazione $y = 3x/2$.*

5. *Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = x^3 + 2x$ e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa fra il suo grafico e la retta di equazione $y = 6x$.*

1.2.3 Mercoledì 21/03/12, lez. 11-12

1. Integrali impropri e integrabilità in senso improprio come limiti di funzioni integrali.

2. Integrale improprio degli infinitesimi e infiniti di riferimento $\frac{1}{|x-x_0|^r}$ e loro interpretazione geometrica in termini di aree.

3. Assoluta integrabilità in senso improprio e relazione fra integrabilità e assoluta integrabilità in senso improprio.

4. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni positive: criterio del confronto, dell'equivalenza asintotica e criterio del confronto per funzioni $f(x) = o(g(x))$.

Esercizi 1.2.2. 1. *Integrabilità impropria della funzione gaussiana $x \mapsto e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$.*

2. *Determinare gli eventuali asintoti delle funzioni integrali precedentemente considerate.*

3. *Delle funzioni $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^1 \arcsin(t)\,dt$ determinare dominio e derivata.*

4. *Determinare l'esistenza dei seguenti integrali impropri con lo studio asintotico della funzione integranda*
$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx,\ \int_0^1 \frac{x}{1-x^3}\,dx,$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}\,dx, \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx.$$

5. *Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di*
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|^\beta}{x^2}\,dx$$

1.3 26-30/03/12. Par. 8.6.

1.3.1 Lunedi' 26/03/1, lez. 13-14, tenute dalla Prof. Poggiolini

1. Integrazione per parti con esempi fra cui il calcolo di $\int_0^1 x^a \ln(x)\, dx\ , \quad a \in \mathbb{R}$
2. Integrazione per sostituzione e sostituzione inversa con esempi

1.3.2 Martedi' 27/03/12, lez. 15-16, tenute dalla Prof. Poggiolini

Integrali delle funzioni razionali (il caso generale con denominatore di grado al piú due) con esempi

1.3.3 Mercoledi' 28/03/12, lez. 17-18, tenute dalla Prof. Poggiolini

Esempi di sostituzioni standard, esercizi

Esercizi 1.3.1. *1. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ stabilire il carattere dell'integrale improprio* $\int_1^{+\infty} x^a \ln(x)\, dx$

2. Calcolo dell'area di parte del cerchio con lo studio della funzione integrale

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$$

3. Calcolare i seguenti integrali orientati usando l'integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale di Riemann

$$\int_1^0 x(x-1)\sin(4\pi x)\, dx\ , \quad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx\ , \quad \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$

4. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si possono calcolare i seguenti integrali di Riemann e calcolarli

$$\int_a^b \ln(x)\, dx\ , \int_a^b \ln|x|\, dx\ , \quad \int_a^b \arctan(x)\, dx\ , \quad \int_a^b \frac{2x+1}{x^2-1}\, dx\ , \quad \int_a^b \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$$

Calcolare poi gli integrali tra due valori determinati di a e b tra quelli possibili.

5. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \frac{\pi}{2}x$.

6. Calcolare $\int_a^b f(x)dx$, dove f è una delle seguenti funzioni e a, b sono coppie di numeri naturali scelte dallo studente (fra quelle possibili).

$$x \mapsto \frac{3x^3+x+1}{x+1}\,, \quad \frac{x}{hx^2+1}\,,\ h \in \mathbb{R}\,, \quad \frac{1}{hx^2+1}\,,\ h \in \mathbb{R}\,,$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}\,, \quad \frac{x+1}{x^2+x+1}\,, \quad \frac{1}{x^2+x+1}\,, \quad \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

7. *Studiare al variare di* $\beta \in \mathbb{R}$ *l'integrabilitá in senso improprio di*
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}\, dx.$$

8. *Studiare* $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ *e, di conseguenza, la funzione*
$$x \mapsto \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{(t-x_0)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \ \sigma > 0, \ x_0 \in \mathbb{R},$$
calcolandone il massimo e gli asintoti orizzontali, sapendo che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *e usando la sostituzione* $y = \frac{t-x_0}{\sqrt{2}\pi}$. *Fare i grafici e confrontarli.*

9. *Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni* $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ *e contenuta nella striscia delimitata dalle rette* $x = 0$ *e* $x = \pi$.

10. *Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni* $y = \arctan(x)$ *ed* $y = \frac{\pi}{4}x$.

11. *Fare uno studio qualitativo di* $G: \ x \mapsto \int_0^{\cos x} \arcsin(t)\, dt$*: dominio, derivata, grafico (qualitativo).*

12. *Calcolare esplicitamente la* $G(x)$ *dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale.*

13. *Data*
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{x^3} & \text{se } x \le -2 \\ \arctan(x) & \text{se } x > -2 \end{cases},$$
studiare $F(x) = \int_{-7}^x f(t)\, dt$, *facendo il grafico di* f *e poi quello di* F*; trovare anche gli asintoti di* F, *e descrivere* $F(x)$ *in termini di aree, per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

14. *Calcolare esplicitamente la* $F(x)$ *dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale, in particolare calcolare* $F(-2)$ *e* $F(1)$.

15. *Data*
$$f(x) = \frac{1 + x^5}{\ln(x)},$$
studiare $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t)\, dt$.

16. *Data* $f : [0; 4] \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 5 & \text{se } x = 1, x = 4 \\ \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases},$$
calcolare $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$*; in particolare calcolare* $F(4)$.

17. *Studiare l'integrabilitá in senso improprio di*
$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{1}{|x - x_0|^r}\, dx\,, \ a > 0, \ \int_a^{+\infty} \frac{1}{|x - x_0|^r}\, dx\,, \ a > x_0, \ \int_{-\infty}^a \frac{1}{|x - x_0|^r}\, dx\,, \ a < x_0$$
con la sostituzione $x - x_0 = h$.

18. *Studiare la funzione* $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^3 + 1}{t^2 \cdot \sqrt[3]{7 - t}}\, dt$

1.4 2-5/04/12. Par. 8.6.

1.4.1 Lunedi' 2/04/12, lez. 19-20

Complementi sul differenziale, esercizi.

1.4.2 Martedi' 3/04/12, lez. 21-22

Esercizi.

1.4.3 Mercoledi' 4/04/12, lez. 23-24

Esercizi.

Capitolo 2

Equazioni differenziali

Ci limiteremo essenzialmente alla teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie lineari in forma normale. Piú precisamente studieremo la teoria generale delle equazioni di ordine n e i metodi risolutivi per le equazioni del primo ordine e del secondo ordine a coefficienti costanti.

Per facilitare lo studio daremo i teoremi fondamentali della teoria, presenti nel testo di riferimento in forma piú generale, nella forma semplificata che serve nel caso considerato. Inoltre faremo uso del linguaggio dell'algebra lineare per sottolineare come problemi diversi possano essere trattati con metodi simili.

Quando il modo di trattare l'argomento è analogo a quello del libro, viene riportato solo l'argomento.

2.1 16–20/04/12. Cap.17: Introduzione e Par. 17.1–4.

2.1.1 Lunedí 16/04/12, lez. 25-26

La ricerca di una primitiva su un intervallo, $y' = f(x)$, è l'esempio più semplice di *equazione differenziale* cioè la ricerca di una funzione con assegnata derivata. L'incognita è una funzione definita su un intervallo I (indicata con y) e l'equazione coinvolge la funzione incognita e le sue derivate (in questo caso appare esplicitamente solo la derivata prima della funzione). Come abbiamo visto la soluzione può non esistere, ma se la soluzione esiste non è unica, per sceglierne una bisogna assegnare la *condizione iniziale*, cioè il valore della funzione in un punto $x_0 \in I$, detto iniziale. Inoltre sappiamo che se $f \in C^0(I)$, la soluzione esiste.

Piú in generale una equazione differenziale ordinaria (indicata spesso con l'acronimo EDO, in italiano, oppure ODE dall'inglese ordinary differential equation) è una equazione la cui incognita è **una funzione definita su un intervallo** e che lega fra loro la funzione incognita e un numero finito di sue derivate. L'ordine massimo di derivazione che appare nell'equazione si dice *ordine dell'equazione.* Se la derivata di ordine massimo si può scrivere come funzione della variabile indipendente, della funzione e delle altre derivate, la EDO si sice *in forma normale.* Indicheremo una EDO di ordine n in forma normale col simbolo

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2.1}$$

In questa scrittura x indica la variabile indipendente e y è il simbolo per la funzione incognita. A seconda del contesto altre lettere possono essere usate sia per la variabile indipendente che per l'incognita. In particolare se la variabile indipendente indica il tempo, viene indicata con t. In questo caso la derivazione viene spesso indicata con un punto sovrascritto, ad esempio $\ddot{x} = tx\dot{x}$ è una EDO del secondo ordine in forma normale dove la variabile indipendente è t e il simbolo per la funzione è x.

Altre notazioni sono in uso, ad esempio la dipendenza dalla variabile independente può essere esplicitata scrivendo $y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Definizione 2.1.1. *Una funzione f definita su un intervallo I si dice soluzione dell'equazione (2.1) se*

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)),\ \forall x \in I.$$

Cioè sostituendo la funzione soluzione nell'equazione, si deve ottenere una identità fra funzioni definite sull'intervallo I.

Si noti che per definizione le soluzioni di una EDO sono definite su intervalli, altrimenti tutta la teoria in proposito sarebbe falsa.

Esercizi 2.1.1.
1. *Per quali valori di $\omega \in \mathbb{R}$ la funzione $y = \sin(\omega x)$ è soluzione della EDO $y'' + 4y = 0$? In quale intervallo?*
2. *Data la EDO $\ddot{x} = x - x^2$, determinare le eventuali soluzioni costanti. Determinare inoltre per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ la soluzione (non costante) $x = \frac{b\,e^{at}}{1+c\,e^{at}}$ è soluzione. In quale intervallo?*

Come abbiamo visto anche nel caso più semplice, se la soluzione esiste non è unica, per ottenere l'unicità della soluzione su un *intervallo massimale* bisogna introdurre il *problema di Cauchy* detto anche *ai valori iniziali*

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = b_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \tag{2.2}$$

cioè si devono assegnare i valori assunti in un punto x_0 dalla funzione e dalle sue derivate fino all'ordine $n-1$. In generale nel problema di Cauchy l'incognita è la funzione e *l'intervallo massimale* su cui può essere definita.

Una EDO si dice *lineare*, se l'equazione che la definisce è un polinomio di primo grado nell'incognita e le sue derivate. Indicheremo una EDO lineare con

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x). \tag{2.3}$$

L'equazione si dice *omogenea* se la funzione φ è la funzione nulla. L'equazione si dice *non omogenea* se non è omogenea.

Nel paragrafo 13.3 è svolta la teoria delle equazioni lineari del secondo ordine che qui svolgiamo per quelle di ordine n (vedi anche il paragrafo 17.4). Riportiamo i teoremi fondamentali nella forma che noi usiamo. Di tali teoremi vanno compresi e saputi usare i significati, senza dimostrazione.

Teorema 2.1.1 (di Cauchy o ai valori iniziali per EDO lineari)**.** *Siano $a_0, \dots, a_{n-1}, \varphi \in C^0(I)$, $x_0 \in I$ e $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x) \\ y(x_0) = b_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \tag{2.4}$$

ammette una soluzione unica su I che è di classe C^n.

Corollario 2.1.1. *Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I)$ e $x_0 \in I$. Allora la soluzione identicamente nulla su I è l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I)$, ponendo $a_n(x) \equiv 1$, possiamo scrivere una equazione lineare omogenea in forma normale come

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0 \tag{2.6}$$

All'equazione possiamo associare un cosidetto *operatore differenziale*, cioè una applicazione

$$\mathcal{P} := \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^i : f \in C^n(I) \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^i f \in C^0(I).$$

Lemma 2.1.1. *L'operatore $\mathcal{P}$ è lineare e le soluzioni dell'equazione 2.6 sono il suo nucleo. Quindi l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Per esercizio: si tratta di far vedere (usando la linearità della derivata) che per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e per ogni $f_1, f_2 \in C^n(I)$, si ha $\mathcal{P}(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1\mathcal{P}(f_1) + c_2\mathcal{P}(f_2)$. Lo studente ripeta per questo caso la dimostrazione che il nucleo di un operatore lineare è uno spazio vettoriale.

Teorema 2.1.2 (senza dimostrazine)**.** *L'insieme* $\ker \mathcal{P}$ *delle soluzioni di una EDO lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n. Cioè esistono n funzioni linearmente indipendenti $f_1, \dots, f_n \in C^n(I)$ tali che*

$$\ker \mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \colon c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ *si dice anche* la soluzione generale *dell'equazione e $c_1, \dots, c_n$ si dicono* le costanti arbitrarie.
Inoltre $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se sono soluzioni di problemi di Cauchy associati all'equazione con condizioni iniziali in $x_0 \in I$ che sono vettori linearmente indipendenti. In altre parole possiamo trovare una base per $\ker \mathcal{P}$ *risolvendo n problemi di Cauchy del tipo*

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases} \qquad \dots\dots\dots \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{cases}$$

Teorema 2.1.3. *Sia h una qualsiasi soluzione della EDO lineare non omogenea 2.3, allora l'insieme delle soluzioni di 2.3 è dato da*

$$\{f + h \colon f \in \ker \mathcal{P}\}.$$

Con le notazioni del precedente Teorema 2.1.2, $y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) + h$ si dice anche la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
Inoltre h viene chiamata anche soluzione particolare, ed il teorema viene anche enunciato come: "la soluzione generale di una EDO lineare non omogenea si ottiene come la somma della soluzione generale della EDO omogenea associata con una soluzione particolare".

Si noti che il precedente teorema è l'analogo di un risultato sulle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite e che anche le dimostrazioni sono completamente analoghe.

Esercizi 2.1.2. Esempi di Edo.

1. *Abbiamo già visto l'equazione differenziale legata al problema della caduta dei gravi lungo la verticale.*

2. **Moto dei gravi (in assenza di viscosità).** *In un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente,* **se si trascura la resistenza dell'aria e si considera costante la forza peso**, *indicando con*

$$t \mapsto P(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

il moto della particella, le equazioni differenziali sono

$$x''(t) \equiv 0,\ \ y''(t) \equiv 0,\ \ z''(t) \equiv -g.$$

Scegliendo opportunamente il sistema cartesiano, si puo' sempre ipotizzare che al tempo 0 il grave si trovi nel punto $P_0 \equiv (0, 0, z_0)$, $z_0 \geq 0$, ed abbia velocita'

$$\vec{v}_0 = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{k},\ \ a \geq 0,$$

dove $a\,\vec{\imath}$ e' la velocita' orizzontale e $b\,\vec{k}$ e' la velocita' verticale. Si ottengono le condizioni iniziali

$$x(0) = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ z(0) = z_0,\ \ x'(0) = a,\ \ y'(0) = 0,\ \ z'(0) = b.$$

Il teorema di Lagrange ci permette di determinare l'equazione di moto del grave

$$x(t) \equiv a\,t,\ \ y(t) \equiv 0,\ \ z(t) \equiv z_0 + b\,t - g\,\frac{t^2}{2}.$$

Si noti che il moto e' verticale se e solo se $a = 0$ e che se $a \neq 0$ la traiettoria e' una parabola nel piano verticale che contiene la direzione di $\vec{v}_0$. Le equazioni della parabola sono

$$z = z_0 + \frac{b}{a}\,x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{a^2}.$$

Esercizio proposto. *Si determini l'equazione della traiettoria $z = f(x)$ in funzione del modulo (intensità) di $\vec{v}_0$, e dell'angolo (orientato) che la velocità iniziale forma con il piano orizzontale. Si disegnino i possibili grafici della traiettoria, considerando che il piano terra abbia quota $z = 0$. Che significato ha l'approssimazione lineare della traiettoria in $x = 0$?*

3. **Caduta dei gravi in mezzo viscoso.** *Il moto avviene in direzione verticale e, detto $k > 0$ il coefficiente di viscosità e m la massa, l'equazione (con le notazioni del punto precedente) diventa*

$$z''(t) \equiv -g - \frac{k}{m} z'(t).$$

Indicando la velocità z' con v e $\mu = \frac{k}{m}$ si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea

$$v'(t) + \mu v(t) \equiv -g.$$

Si nota che in un circuito in cui sia presente una resistenza e una induttanza costanti (R e L rispettivamente) e una differenza di potenziale $t \mapsto E(t)$, l'intensità di corrente $t \mapsto I(t)$ soddisfa ad una equazione simile alla precedente data da

$$I'(t) + \frac{R}{L} I(t) \equiv E(t).$$

Cosa significa il teorema di Cauchy per questi casi fisici?

4. **Accrescimento di una popolazione in ambiente con risorse illimitate.** *L'equazione che caratterizza questo problema è data da*

$$\dot{x} = a\,x\,, \quad a > 0\,, \qquad x(0) = x_0 > 0.$$

Se $a < 0$, la stessa equazione descrive il decadimento di una "popolazione", ad esempio il decadimento radiattivo.
Verificare che la funzione $f : t \mapsto x_0 e^{at}$ è la soluzione del precedente problema di Cauchy su $\mathbb{R}$.

5. **Equazione di moto del pendolo per le piccole oscillazioni**. *Un pendolo di lunghezza l, spostato di un angolo orientato α dalla posizione di equilibrio stabile $\alpha = 0$ è sottoposto ad una forza (risultante della forza peso e della reazione vincolare) che ha direzione tangente alla circonferenza descritta dal pendolo e verso che si oppone allo spostamento. Un semplice conto trigonometrico mostra che l'intensità della forza è data da $g\sin(\alpha)$. L'equazione fondamentale della dinamica implica che lo spostamento dalla posizione di equilibrio $t \mapsto s(t) = l\,\alpha(t)$ soddisfa alla seguente equazione differenziale non lineare del secondo ordine.*

$$s''(t) + g\sin(s(t)/l) = 0.$$

Piccole oscillazioni. *Significa che consideriamo la parte principale della forza, in questo caso l'equazione diventa lineare del secondo ordine. Indicando con ω^2 il numero positivo g/l, si ottiene*

$$s''(t) + \omega^2\, s(t) = 0 \quad \textit{o equivalentemente} \quad \alpha''(t) + \omega^2\, \alpha(t) = 0,$$

detta anche equazione del moto armonico. Si noti che una equazione simile si ottiene anche quando siamo in presenza di una forza elastica che si oppone al moto.

(a) *Verificare che le funzioni $t \mapsto \sin(\omega t)$ e $t \mapsto \cos(\omega t)$ sono soluzioni dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.*

(b) *Usare la teoria svolta per dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni e che al variare di $A, B \in \mathbb{R}$ otteniamo tutte le soluzioni dell'equazione.*

(c) *Verificare che, per ogni $\rho, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto \rho\cos(\omega t + \beta)$ è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.*

(d) *Verificare che le forme (b) e (c) per le soluzioni del moto armonico sono equivalenti. Nella forma (c) alle coppie di parametri (ρ, β) e $(-\rho, \beta + \pi)$ corrisponde la stessa soluzione. Nelle applicazioni spesso si usa $\rho \geq 0$ e $\beta \in [0, 2\pi)$. ρ è detta ampiezza dell'oscillazione e β fase. Inoltre a $\rho = 0$ o equivalentemente a $A = B = 0$ corrisponde la soluzione nulla. Disegnare il grafico delle soluzioni in funzione di ampiezza e fase.*

(e) *Determinare la soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni con condizioni iniziali* $s(0) = s_0$, $s'(0) = 0$ *(spostamento del pendolo dalla posizione di equilibrio) e con condizioni iniziali* $s(0) = 0$, $s'(0) = v_0$ *(spinta del pendolo nella posizione di equilibrio). A quale problema di Cauchy corrisponde la soluzione nulla?*

6. *Verificare che le funzioni definite da*

$$f_1(x) = x \quad e \quad f_2(x) = -1/x^2$$

sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ *dell'equazione lineare omogenea*

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \tag{2.7}$$

e determinarne la soluzione generale. Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

7. *Verificare che le funzioni definite da*

$$f_1(x) = x^2 \quad e \quad f_2(x) = x^2 \ln(x)$$

sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ *dell'equazione lineare omogenea*

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \tag{2.8}$$

e determinarne la soluzione generale. Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1, \end{cases}$$

8. *La funzione definita da* $f(x) = -1/x^2$ *è soluzione dell'equazione 2.8? La funzione definita da* $g(x) = \ln(x)$ *è soluzione dell'equazione 2.8? Giustificare le risposte.*

2.1.2 Martedí 17/04/12, lez. 27-28

1. Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea del primo ordine $y' = a(x)y$ e soluzione del problema di Cauchy.
2. Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti $y'' + a_1y' + a_0y = 0\,, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Soluzione del problema di Cauchy.
3. Metodo di variazione della costante e metodi "ad hoc" per il calcolo di una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea del primo ordine

   $$y' = a(x)y + b(x).$$

   Soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy.
4. Metodo di variazione delle costanti e metodi "ad hoc" per il calcolo di una soluzione particolare per le equazioni lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.

2.1.3 Mercoledí 18/04/12, lez. 29-30

Esercizi 2.1.3. 1. *Studio di* $y'' + \omega^2 y = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$*, risonanza* ($\alpha = \omega$) *e soluzioni periodiche* ($\alpha \neq \omega$)

2. *Studio di* $y'' + 2\mu y' + \omega^2 y = 0$, $\mu > 0$*, possibili soluzioni in dipendenza del discriminante dell'equazione caratteristica ed esempi di problemi di Cauchy associati.*

3. *Esempi di EDO lineari con condizioni diverse da quelle di Cauchy.*

4. *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine sulla semiretta* $(0, +\infty)$
$$x^2 y'' + 2xy' - \frac{15}{4} y = 0.$$
   a. *Verificare che* $y(x) = x^{3/2}$ *e* $y = x^{-5/2}$ *sono soluzioni della precedente equazione*
   b. *Determinare la soluzione generale della precedente equazione*
   c. *Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali*
$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2$$
   d. *Discutere l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione con le condizioni*
$$y(1) = 1, \qquad y(10) = 1$$

5. *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine*
$$y'' + y = -2\tan(x).$$
   a. *Verificare se*
$$y = 2\cos(x)\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$
   è soluzioni della precedente equazione ed in quale intervallo (quali intervalli)
   b. *Determinare la soluzione generale della precedente equazione nell'intervallo* $(-\pi/2, \pi/2)$.
   c. *Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali*
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -3$$
   d. *Discutere l'esistenza e l'unicità, al variare di* $a \in \mathbb{R}$ *della soluzione dell'equazione con le condizioni*
$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = a$$

6. *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine*
$$y'' + 3y' + 3y = 0.$$
   a. *Determinare la soluzione generale della precedente equazione.*
   b. *Determinare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali*
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$
   c. *Per quali valori di* $a, b \in \mathbb{R}$ *la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali*
$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$
   tende a 0 *per* $x \mapsto +\infty$?

7. *Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione*
$$\ddot{y}+4\dot{y}+y=0$$
e che al tempo $t=0$ *si abbia* $y(0)=0$ *e* $\dot{y}(0)=3$

   a. *Determinare lo spostamento in funzione del tempo e disegnarne il grafico.*
   b. *Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a* $+\infty$
   c. *Determinare, se esistono, i valori di* $a, b \in \mathbb{R}$ *per cui lo spostamento della molla che al tempo* $t=0$ *soddisfa a*
   $$y(0)=a, \qquad \dot{y}(0)=b$$
   decresce senza oscillare.

8. *Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione*
$$\ddot{y}+\dot{y}+y=0$$
e che al tempo $t=0$ *si abbia* $y(0)=0$ *e* $\dot{y}(0)=2$

   (a) *Determinare lo spostamento in funzione del tempo*
   (b) *Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a* $+\infty$
   (c) *Determinare, se esistono, i valori di* $a, b \in \mathbb{R}$ *per cui lo spostamento della molla che al tempo* $t=0$ *soddisfa a*
   $$y(0)=a, \qquad \dot{y}(0)=b$$
   decresce senza oscillare.

9. *Risolvere, col metodo di variazione delle costanti, l'equazione lineare del primo ordine*
$$y'=-4y+3x+1$$

10. *Risolvere, coi metodi "ad hoc", l'equazione lineare del primo ordine:*
$$y'=y+\sin x$$

11. *Risolvere, coi metodi "ad hoc", il problema di Cauchy del primo ordine:*
$$\begin{cases} y'=3y+e^{2x} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

12. *Risolvere, coi metodi "ad hoc", il problema di Cauchy del primo ordine:*
$$\begin{cases} y'=2y+e^{2x} \\ y(0)=3 \end{cases}$$

13. *Risolvere, col metodo di variazione delle costanti, le seguenti EDO*
$$y''+y=\frac{1}{\cos(x)}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad y''-y=e^{-x}.$$

14. *Trovare, coi metodi "ad hoc", la soluzione generale di*

$$y'' + 2y' - 3y = e^{4x}.$$

15. *Risolvere i problemi di Cauchy con $x(0) = 1$ associati alle seguenti equazioni*

$$\begin{aligned} x' &= 4x \\ x' &= x + 3t^3 + 4t^2 + 1 \\ x' &= x + \sin(t) \\ x' &= 3x + \exp(2t) \end{aligned}$$

16. *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*
$x'' + 9x = -\sin t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$
$x' = 1/(1 - t^2)x,\ x(0) = 2$

17. *Determinare la soluzione generale di:*
$x'' + 2x' - 3x = \exp(lx)\,,\ l \in \mathbb{R}$ *e* $x'' + x = t^3 - t + 1$.

18. *Verificare che se y_1 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t)$ e y_2 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_2(t)$, allora $(y_1 + y_2)$ e' soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t) + f_2(t)$*

19. *Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale*

$$\ddot{x} + 16x = -\cos(t)$$

e che al tempo 0 lo spostamento valga $x(0) = 0$ e la velocità valga $\dot{x}(0) = -1$

   a. *Determinare lo spostamento in funzione del tempo*
   b. *Esiste l'ampiezza massima dell'oscillazione? Come si puó determinare?*
   c. *Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?*

20. *Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale*

$$\ddot{x} + 9x = -\sin(3\,t)$$

   a. *Determinare lo spostamento in funzione del tempo e della posizione e velocità al tempo 0*
   b. *Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione*
   c. *Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?*

21. *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine*

$$y'' + 4y' + y = \sin(3x)\,. \tag{2.9}$$

   a. *Determinare la soluzione generale dell' equazione omogenea associata*
   b. *Determinare la soluzione generale dell' equazione non omogenea*
   c. *Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali*

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

   d. *Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione delle equazioni (omogenea e non omogenea) con condizioni iniziali*

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

   tende a $-\infty$ per $x \mapsto +\infty$?

Capitolo 3

Funzioni di più variabili

Per questa parte del corso verrà seguita essenzialmente l'impostazione del libro e saranno segnalate le parti da svolgere. Inoltre i teoremi citati sono da intendersi senza dimostrazione, se non esplicitamente detto.

Se il modo di trattare l'argomento è analogo a quello del libro, viene riportato solo l'argomento.

Lo studente che lo preferisca può seguire ogni altra impostazione, purché coerente.

3.1 23/04-2/05/12. Cap. 10.

3.1.1 Lunedí 23/04/12, lez. 31-32.

1. Funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e loro domino naturale (convenzione sul dominio). Grafico, equazione del grafico. Casi particolarmente importanti: $m = 1$ e $n = 1$. Insiemi (curve, superfici) di livello di funzioni a valori scalari. Esempi dalla geometria: equazioni parametriche e cartesiane di retta e piano in $\mathbb{R}^3$.

2. Concetti base in $\mathbb{R}^n$ e loro confronto con i concetti analoghi su $\mathbb{R}$: prodotto scalare, modulo o norma, distanza, disuguaglianza triangolare e di Cauchy-Schvartz, ortogonalità.

3. Intorni sferici $B_\epsilon(P)$, indicati anche $I_\epsilon(\mathbf{x_0})$, in analogia con il caso $n = 1$.

4. Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, punti isolati; insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi limitati. Interno, frontiera e chiusura di un insieme

Come fatto in $\mathbb{R}$ daremo prima la definizione di continuità e poi quella di limite, molti dei risultati e definizioni si ottengono da quelli visti usando l'opportuno significato di intorno.

Definizione 3.1.1. *La funzione $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice continua in $\mathbf{x_0} \in D_f$ se per ogni intorno $I_\epsilon(f(\mathbf{x_0}))$ di $f(\mathbf{x_0})$ in $\mathbb{R}^m$ esiste un intorno $I_\delta(\mathbf{x_0})$ di $\mathbf{x_0}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(I_\delta(\mathbf{x_0}) \cap D_f)$ è contenuto in $I_\epsilon(f(\mathbf{x_0}))$. Inoltre f si dice continua se lo è in ogni punto del suo dominio.*

Esercizi

1. (Da fare.) Confrontare la Definizione 3.1.1 con la definizione di limite e continuità date nel libro nel Par. 10.3. Inoltre riscriverla in termini di $||\cdot||$.

2. La funzione $x_i : (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto a_i \in \mathbb{R}$ si dice i-esima funzione coordinata. Dimostrare, usando la definizione, che è continua.

3. Sia $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\gamma_i : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{x_0} + t\mathbf{e_i} \in \mathbb{R}^n$ si dice i-esima curva coordinata in $\mathbf{x_0}$. Dimostrare, usando la definizione, che è continua.

Data la funzione $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, componendola con le m funzioni coordinate di $\mathbb{R}^m$, si ottiene $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Vale il seguente risultato (vedi anche il testo):

Teorema 3.1.1. *$f = (f_1, \ldots, f_m) : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua in $\mathbf{x_0}$ se e solo se lo sono le funzioni $f_i : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.*

Teorema 3.1.2 (senza dimostrazione)**.** *Ogni funzione ottenuta combinando funzioni continue tramite operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione è continua. Più precisamente: ... completare per esercizio confrontando con l'analogo teorema per le funzini da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, attenzione a quali operazioni si possono considerare per qualsiasi dimensione del dominio e del codominio.*

Curve parametrizzate, Par.10.3.3 (tutto): definizione, sostegno, equazioni parametriche. Esempi dalla geometria: equazioni parametriche della retta nel piano e nello spazio.

Esercizi 3.1.1. *1. Curve parametrizzate il cui sostegno è una circonferenza e una ellisse: Sia $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, r, r_1, r_2 numeri reali strettamente positivi e $t \in [0, 2\pi]$, provare che*

$$\begin{cases} x = & a + r\cos(t) \\ y = & b + r\sin(t) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = & a + r_1\cos(t) \\ y = & b + r_2\sin(t) \end{cases}$$

sono curve parametrizzate i cui sostegni rappresentano una circonferenza di centro P e raggio r e una ellisse di centro P e semiassi r_1 e r_2, rispettivamente.

2. Esempi di curve parametrizzate: spirali nel piano e nello spazio, per $t \in [0, +\infty)$

$$\begin{cases} x = & t\cos(t) \\ y = & t\sin(t) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = & \cos(t)/(1+t) \\ y = & \sin(t)/(1+t) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = & \cos(t) \\ y = & \sin(t) \\ z = & t \end{cases}$$

3.1.2 Martedí 24/04/12. Lez. 33-34

I teoremi sulle funzioni continue e loro confronto con gli analoghi in $\mathbb{R}$.

1. Definizione di insieme compatto come insieme chiuso e limitato, pg.315 (Par. 10.3.1) del testo. Esercizio 10.10 del testo.

2. Definizione di insieme connesso per archi (definizione 10.15 del testo), analogia con gli intervalli di $\mathbb{R}$. Esempi grafici, cerchio, corona circolare.

3. Definizione di insieme convesso (definizione 11.5 del testo). Esempi grafici, il cerchio è convesso, la corona circolare non lo è.

4. Teorema di Weierstrass, Teorema 10.10 del testo. Analogie e differenze con la teoria svolta nel primo semestre.

5. Teorema degli zeri e dei valori intermedi per funzioni continue su insiemi connessi per archi, pg.284 ed esercizi 10.10 b) e c) del testo. Entrambi sono corollari del seguente teorema.

   Teorema 3.1.3. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso per archi e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua, allora $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano $P_1 = f(Q_1)$ e $P_2 = f(Q_2)$ due punti in $f(A)$. Poichè A è connesso per archi, esiste una curva parametrizzata $\gamma : [a, b] \to A$ tale che $f(a) = P_1$ e $f(b) = P_2$. Il sostegno della curva parametrizzata $f \circ \gamma$ è contenuto in $f(A)$ e congiunge i punti P_1, P_2, quindi $f(A)$ è connesso per archi.

6. Applicazioni del teorema del segno allo studio delle disequazioni ed ai domini delle funzioni. Esempio: determinare il segno della funzunzione definita da $f(x, y) = x^2 + y^2 - |2x + 2y|$.

Esercizi 3.1.2. *1. Disegnare i seguenti insiemi e determinare quali siano aperti, chiusi, né aperti né chiusi, limitati, non limitati, compatti, convessi e non, connessi e non. Determinare di ogni insieme l'interno, la chiusura e la frontiera:*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}; \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 < 4\}; \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y < 10\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \le 10\}; \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x + 3y \le 10\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x + 3y < 10\}; \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x + 3y < 10\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x + 3y \le 10, -2 \le x - y \le 2\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x + 3y < 10, -2 < x - y < 2\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 16x + 28 \le y \le x^2 - 8x + 21\};$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(xy) < 1\,, \quad x^2 + y^2/4 \le 1\}.$$

2. Determinare dominio e continuità della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 + 5y + 7xy} + \cos(3x) - \frac{5}{2}y$$

e giustificare l'esistenza o meno di massimo e minimo assoluti di $f(x, y)$ (col solo teorema di Weierstrass).

3. Disegnare gli insiemi (che in questo caso sono curve) di livello di $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 - y^2$.

4. Fare gli esercizi 10.10 -10.14 del testo.

3.1.3 Mercoledí 2/05/12

Lez. 35-36.

1. L'elemento ∞ ed i suoi intorni, Par.10.2.3 del testo.
2. Definizione di "definitivamente per $x \to \alpha \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$" e di limite di funzioni di piú variabili, Par. 10.3. Esempi di verifica di limiti:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$$

3. Riduzione al caso di funzioni a valori scalari e proprietà dei limiti (Par.10.3).
4. Esempi, relazione fra continuità e limiti, uso della continuità per il calcolo dei limiti e limiti delle funzioni combinate.

5. Condizione necessaria per l'esistenza del limite tramite la composizione con curve parametrizzate, in particolare con rette.

6. Coordinate polari e limiti con le coordinate polari, pg.323 (Par. 10.4.3) del testo.

Esercizi 3.1.3. *1. Calcolare, se esiste,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y \log(1+x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} + \cos(x+y) \right)$

2. Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)$

3. Determinare se la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *è continua e calcolare, se esiste* $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$*. Inoltre usare le coordinate polari per verificare che è costante sulle semirette ed ha massimo e minimo globali.*

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definita da* $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$*. Calcolare, se esiste,* $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ *e dare la definizione di* $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$*. Inoltre discutere l'esistenza di massimo e minimo della funzione nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2 e nel cerchio aperto; calcolarli, se esistono, usando le coordinate polari. La funzione è limitata? Passando a coordinate polari discutere l'esistenza di massimo e minimo globali.*

5. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2)^2 - 2(4x^2-y^2), \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} (x^2-9y^2) - (x^2+y^2)^2.$$

lez. 37-38, tenute dalla Prof. Poggiolini
Esercizi sulle equazioni differenziali (preferibilmente proposte dagli studenti) e sulle funzioni di piú variabili.

3.2 Settimana 7-11/05/12. Par. 11.1-5 (escluso 11.2.2)

3.2.1 Lunedí 7/05/12, lez. 39-40

1. Derivata di una curva parametrizzata, detta anche vettore tangente o vettore velocità (definizione nel paragrafo 12.1 del testo), retta tangente.

2. Derivate direzionali e derivate parziali di funzioni a valori scalari, gradiente e derivata.

3. Differenziabilità di funzioni a valori scalari, continuità delle funzioni differenziabili. Piano tangente al grafico.

4. Direzioni di massima e minima crescita.

5. Funzioni di classe $C^1(A)$ e condizione sufficiente per la differenziabilità (Definizione 11.4 e Corollario 11.1, non importa il teorema 11.5).

6. Regola della catena per $f \circ g$ (con dimostrazione) nel caso che f sia a valori in $\mathbb{R}$ oppure g una curva parametrizzata.

7. Derivabilità e differenziabilità delle funzioni combinate con somma prodotto e quoziente.

Esercizi 3.2.1. 1. *Determinare e disegnare il vettore tangente (vettore velocità) e la retta tangente (se esiste) alla curva* $\gamma(t): \begin{cases} x(t) = & t\cdot\cos(t) \\ y(t) = & t\cdot\sin(t) \end{cases} \quad t>0, \quad$ *in* $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. *Determinare e disegnare il vettore tangente (vettore velocità) e la retta tangente (se esiste) alla curva* $\gamma(t): \begin{cases} x(t) = & \frac{\cos(t)}{1+t} \\ y(t) = & \frac{\sin(t)}{1+t} \end{cases} \quad t>0, \quad$ *in* $\gamma(\pi)$.

3. *Determinare e disegnare il vettore tangente (vettore velocità) e la retta tangente (se esiste) alla curva* $\gamma(t): \begin{cases} x(t) = & \cos(t) \\ y(t) = & \sin(t) \\ z(t) = & t \end{cases} \quad t>0, \quad$ *in* $\gamma(2\pi)$.

4. *Disegnare la seguente curva e determinare i punti in cui il vettore tangente si annulla (punto singolare).* $\gamma(t): \begin{cases} x(t) = & t^3 \\ y(t) = & t^2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad .$

5. *Data la curva*
$$\gamma(t): \begin{cases} x(t) = & t^3+t^4 \\ y(t) = & \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{cases} \quad t\in[-2;2],$$
determinare i valori di t *per cui il vettore velocità si annulla (punti singolari) e la retta tangente alla curva in* $t=-1$.

6. *Determinare il piano tangente al grafico di* $f(x,y) = \sin(x)+\cos(x)\sin(y)+x$ *in* $P\equiv\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

7. *Determinare il piano tangente al grafico di* $f(x,y) = x+2xy+3y^2$ *in* $P\equiv(4,1)$.

8. *Determinare il piano tangente al grafico di* $f(x,y) = \sin(xy^2)$ *in* $P\equiv(\pi,1)$.

9. *Determinare la direzione di massima e minima crescita di* $f(x,y) = x^2\sin(y)+xye^x$ *in* $P\equiv(2,\frac{\pi}{2})$.

10. *Determinare la direzione di massima e minima crescita di* $f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^2+1}$ *in* $P\equiv(-1,\frac{3}{2})$.

11. *Dimostrare che*
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & se\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
è differenziabile in (0,0).

12. *Dimostrare che*
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ xy=0 \\ 1 & se\ xy\neq 0 \end{cases}$$
non è differenziabile in $(0,0)$.

13. *Data*
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & se\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

verificare che di f è differenziabile in $(0,0)$ ma che le sue derivate parziali non sono continue in $(0,0)$.

14. *Dimostrare che*
$$f(x,y) = \begin{cases} x & se\ y = 0 \\ 0 & se\ y \neq 0 \end{cases}$$
ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma non è differenziabile in $(0,0)$.

15. *Dimostrare che*
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = 0 \end{cases}$$
ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma non è differenziabile in $(0,0)$.

3.2.2 Martedí 8/05/12, lez. 41-42

1. Derivate seconde, teorema di Schwartz, matrice Hessiana, derivate di ordine superiore.
2. Polinomio di Taylor di ordine 2 col resto in forma di Peano (Par. 11.4).
3. Polinomi di Taylor di ogni ordine ottenuti mediante l'uso dell'approssimazione di Taylor delle funzioni di una variabile.

Esercizi 3.2.2. 1. *Determinare lo sviluppo in serie di Taylor fino al quarto ordine col resto nella forma di Peano in $(0,0)$ di $f(x,y) = e^x \sin(y)$ e dedurne la matrice Hessiana.*

2. *Determinare lo sviluppo in serie di Taylor fino al quarto ordine in $(0,0)$ col resto nella forma di Peano di $f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2}$ e dedurne la matrice Hessiana.*
3. *Calcolare con gli sviluppi di Taylor (al più) del secondo ordine attorno all'origine* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)+2}{e^{2x^2+y^2}-1}$.
4. *Calcolare con gli sviluppi di Taylor (al più) del secondo ordine attorno all'origine* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x\sin(y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
5. *Determinare lo sviluppo di Taylor del terzo ordine della funzione $f(x,y) = y^{2x}$ attorno $(1,1)$.*

3.2.3 Mercoledí 9/05/12, lez. 43-44

1. Estremi liberi: definizione di punto critico, estremale o singolare, condizione necessaria del primo ordine con dimostrazione (gradiente nullo) per funzioni di classe C^1, Teorema 11.23. Interpretazione in termini di piano tangente.
2. Funzioni convesse su insiemi convessi e confronto col caso di variabile scalare: definizione, definizione equivalente per funzioni di classe C^1 (Teorema 11.19) e per funzioni di classe C^2 (Teorema 11.20).
   Esercizio. Dare la definizione di funzione concava su insiemi convessi e sua caratterizzazione nel caso di funzioni di classe C^1 e C^2.
   Condizione di punto di minimo (massimo) libero per funzioni convesse (concave)

3. Grafici di polinomi di secondo grado in due variabili. Casi particolari:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \textit{paraboloide ellittico;}$$

$$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \textit{paraboloide ellittico;}$$

$$z = -x^2 + y^2 \quad \textit{paraboloide iperbolico o a sella,}$$

il cui grafico, mediante una rotazione attorno all'asse z di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario,

va a coincidere col grafico di $z = xy$.

3.3 Settimana 14-18/5/12. Par. 11.6,7

3.3.1 Lunedì 14/05/12, lez.45-46

1. Forme quadratiche e loro segnatura.
2. Condizione necessaria e condizione sufficiente del secondo ordine (segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana in termini di autovalori) per funzioni di classe C^2, con dimostrazione.
3. Il caso $n = 2$.

Esercizi 3.3.1. *1. Studiare, al variare di $a, b \in (0 + \infty)$, i seguenti grafici:*
$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ *(paraboloide ellittico)*
$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$, $z = \pm\frac{xy}{a^2}$ *(paraboloide iperbolico o a sella).*
Determinarne in particolare concavità convessità, eventuali massimi e minimi locali e globali, linee di livello e se sono figure di rotazione intorno all'asse z.

2. *Considerare la funzione definita da $f(x, y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2$. Usare un opportuno cambiamento di coordinate lineare (quale?) per stabilire che il suo grafico è un paraboloide ellittico, iperbolico oppure un cilindro (con base una parabola). Il grafico potrebbe anche essere un piano, in che caso?*

3. *Data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da $f(x, y) = \sqrt{1 + 5y + 7xy} + \cos(3x) - \frac{5}{2}y$, determinarne lo sviluppo in serie di Taylor del secondo ordine attorno all'origine per vedere se l'origine è un punto stazionario (o critico), e se sì di che tipo, studiandone la matrice hessiana e calcolando di questa gli autovalori.*

4. *Studiare convessità e concavità, con l'uso della matrice haessiana, delle seguenti funzioni:*

$$f(x, y) = -2x^2y + xy^2 + x - y - 1\,; \quad x^2y^2\,; \quad x^2y^2 + 6y^2\,; \quad xe^{xy}$$

5. *Delle seguenti funzioni determinarne i punti stazionari (o critici) e la loro natura (cioè se sono di minimo, di massimo relativo o di sella):*

$$f(x, y) = (x+y+1)(x-y+1), \quad xe^{xy}, \quad axy-x^3y-bxy^3 = xy(a-x^2-by^2),\ a, b > 0$$

$$e^x(x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y)\,, \quad \frac{x^4}{4} - 2x^2 + (x^2 - 1)y^2\,, \quad \sin(x) + \cos(y)$$

6. *Determinare i valori di* $k \in \mathbb{R}$ *tali che* $f(x,y) = kx^2 + 6xy + y^2$ *abbia un minimo nell'origine.*

7. *Determinare i punti critici e di estremo locale di* $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$ *con lo studio della funzione* $g(s) = \frac{s}{1+s^2}$, *e ricavando da quest'ultimo il grafico di* f.

8. *Delle seguenti funzioni di tre variabili determinarne i punti stazionari (o critici) e la loro natura (cioè se sono di minimo, di massimo relativo o di sella)*

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz\,, \quad \frac{x^3}{3} + x(y^2 + z^2 - 1)$$

3.3.2 Martedì 15/05/12, lez.47-48

1. Derivabilità e differenziabilità delle funzioni di piú variabili, matrice Jacobiana.

2. Trasformazioni in $\mathbb{R}^n$, cioè $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, determinante Jacobiano. Teorema di invertibilità locale (Teorema 13.1). Cambiamenti di coordinate.

3. Differenziabilità delle funzioni combinate, regola della catena.
   Esercizio (regola pratica della catena). Date $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definite rispettivamente da

$$\begin{aligned} y_i = &\quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad i = 1, \ldots, m \\ z = &\quad g(y_1, \ldots, y_m) \quad , \end{aligned}$$

   si vede facilmente che $h \equiv g \circ f$ è definita da

$$z = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

   Verificare che il teorema sulla matrice jacobiana della composizione porta al seguente risultato

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\mathbf{x}))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(\mathbf{y})\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

   La seconda scrittura, è una convenzione usata nelle applicazioni efficace come regola mnemonica. La regola della catena si ottiene semplicemente scrivendo, mediante la sommatoria, il prodotto righe per colonne fra matrici; si faccia attenzione a quali sono gli indici uguali e a quali di essi sono ripetuti.

3.3.3 Mercoledì 16/05/12, lez.49-50

1. Cambiamento di coordinate nello spazio (Par. 14.5.2.).
   Coordinate cilindriche di centro (x_0, y_0, z_0):

$$\Psi(\rho,\varphi,z') : \begin{cases} x = & x_0 + \rho \cdot \cos(\varphi) \\ y = & y_0 + \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z = & z_0 + z' \end{cases} \quad ;$$

   Coordinate sferiche (distanza, longitudine, latitudine) di centro $(0,0,0)$:

$$\Psi(r,\varphi,\vartheta) : \begin{cases} x = & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ y = & r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \\ z = & r \cdot \cos(\vartheta) \end{cases} \quad ;$$

Esercizi 3.3.2. *1. Scrivere il cambiamento di coordinate sferiche di centro* $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$.

2. *Fare tutti gli esempi e gli esercizi del testo sugli argomenti svolti.*

3. *Verificare la regola gella catena per* $f \circ \gamma$ *e per* $\gamma \circ f$*, dove* f *e* γ *sono rispettivamente definite da*

$$w = x^2 - y^2 - z^2\,, \qquad \begin{cases} x = & \cos(t) \\ y = & \sin(t) \\ z = & t \end{cases}$$

4. *Sia* f *la funzione definita da*

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) *Usando le coordinate polari, verificare che* f *non è continua nell'origine*
   (b) *Verificare, usando la definizione, che le derivate parziali di* f *esistono e sono nulle nell'origine*
   (c) *Calcolare le derivate parziali di* f *e dedurne che* f *è differenziabile in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (d) *Considerare la trasformazione (coordinate polari)* Ψ *definita da*

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\varphi) \\ y = & \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$

   e calcolare la matrice jacobiana di $f \circ \Psi$ *sia direttamente, sia col prodotto delle matrici jacobiane, sia con la regola della catena. Porre attenzione a come è definita* $f \circ \Psi$ *e all'insieme in cui è differenziabile.*

5. *Considerare le funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x,y) = 2y\cos(xy) - x\,, \quad 2\sin(2x+y) - x\,.$$

   a. *Determinare le derivate parziali.*
   b. *Determinare la direzione di massima pendenza della funzione nell'origine.*
   c. *Determinare il polinomio di McLaurin di grado 4 e 5.*
   d. *Dedurre dal precedente punto l'equazione del piano tangente al grafico nel punto* $(0,0,f(0,0))$ *e la matrice Hessiana di* f *nell'origine.*
   e. *Dedurre dal precedente punto se l'origine e' un punto stazionario. In caso affermativo dedurre, se possibile, se sia un punto di sella o un minimo o massimo locale.*

6. *Considerare le funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x,y) = e^{xy} - \cos(x^2) - y^2 + y\sin(x) + 1\,, \quad xe^{xy} - \cos(x) + y^2 - \sin(x) + 1.$$

   a. *Determinarne il polinomio di McLaurin di grado 2.*
   b. *Dedurre dal precedente punto se l'origine e' un punto stazionario. In caso affermativo dedurre, se possibile, se sia un punto di sella o un minimo o massimo locale.*
   c. *Determinare il polinomio di McLaurin di grado 4 e 5.*

7. *Data la curva in* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\gamma :&\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ &t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t)),\end{aligned}$$

$\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, *e la funzione scalare di n variabili*

$$\begin{aligned}f :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n),\end{aligned}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *calcolare la matrice jacobiana di* $f \circ \gamma$ *sia direttamente sia col prodotto delle matrici jacobiane di* f *e di* γ *(regola della catena) e vedere se questa può avere determinante* $\neq 0$ *perchè* $f \circ \gamma$ *sia localmente invertibile; poi calcolare la matrice jacobiana di* $\gamma \circ f$ *sia direttamente sia col prodotto delle matrici jacobiane di* γ *e di* f *e verificare che questa ha determinante sempre* $= 0$ *e quindi* $f \circ \gamma$ *non è invertibile con inversa* C^1 *in nessun aperto di* $\mathbb{R}^n$.

8. *Data la curva*

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & \cos(t) \\ y(t) = & \sin(t) \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z(t) = & t \end{cases}$$

e la funzione scalare $w = f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *fare quanto richiesto nell'esercizio precedente.*

9. *Date* $F(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *e* $G(t) = (t, t)$ *calcolare* $\frac{d(F \circ G)}{dt}$ *e* $J_{G \circ F}$ *(cioè le matrici jacobiane di entrambe le composizioni) sia direttamente sia con la regola della catena nei punti in cui la composizione è definita. Calcolare, se esiste, il limite di* $F(x, y)$ *per* $(x, y) \to (0, 0)$ *e per* $(x, y) \to \infty$.

10. *Date* $F(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ *e* $G(t) = (\sqrt{1 + t^2}, t)$, *calcolare* $\frac{d(F \circ G)}{dt}$ *e* $J_{G \circ F}$ *(cioè le matrici jacobiane di entrambe le composizioni), sia direttamente sia con la regola della catena nei punti in cui la composizione è definita.*

3.4 Settimana 21-25/05/12. Cap. 13

3.4.1 Lunedí 21/05/12, lez. 51-52, lezioni tenute dal Prof. Benevieri

Il problema della funzione implicita: il caso di una equazione in due incognite, curve di livello, loro rette tangenti e approssimazione locale.

3.4.2 Martedí 22/05/12, lez. 53-54, lezioni tenute dal Prof. Benevieri

Il problema della funzione implicita: il caso di una equazione in tre incognite, superfici di livello, loro piani tangenti e approssimazione locale.

3.4.3 Mercoledí 23/05/12, lez. 55-56, lezioni tenute dal Prof. Benevieri

Esercizi: ricerca degli estremi vincolati mediante la parametrizzazione del vincolo.

3.5 Settimana 28-31/05/12, Cap. 13

3.5.1 Lunedí 28/05/12, lez. 57-58

Esercizi, in particolare sulla *approssimazione locale delle curve di livello*. Sia f una funzione di due variabili di classe $C^k(X)$, X aperto, e sia $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in X$. Se $\partial_y f(P_0) \neq 0$, è definita implicitamente la funzione $y = \varphi(x)$ da

$$\begin{aligned} f(x, \varphi(x)) &\equiv 0 \qquad (3.1)\\ \varphi(x_0) &= y_0 \qquad (3.2) \end{aligned}$$

Per ottenere la derivata della funzione implicita si deriva, usando la regola della catena, l'equazione (3.1), ottenendo

$$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0. \qquad (3.3)$$

Dall'equazione (3.3), usando (3.2) si ottiene

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}. \qquad (3.4)$$

Derivando l'equazione (3.3) si ottiene

$$\partial^2_{xx} f(x, \varphi(x)) + 2\partial^2_{xy} f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \partial^2_{yy} f(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi''(x) \equiv 0.$$

Da questa, usando (3.2) e (3.4), si ottiene

$$\varphi''(x_0) = -\frac{(1, \varphi'(x_0))H_f(x_0, y_o)\binom{1}{\varphi'(x_0)}}{\partial_y f(x_0, y_0)}.$$

Continuando si possono calcolare le derivate successive e quindi l'approssimazione di Taylor di ordine k della funzione φ.

Con un analogo ragionamento si ottiene l'approssimazione locale per la funzione implicita $x = \psi(y)$ che si può definire nel caso che $\partial_x f(P_0) \neq 0$.

3.5.2 Martedí 29/05/12, lez. 59-60.

Esercizi.

3.5.3 Mercoledí 26/05/10, lez. 61-64.

Estremi vincolati di funzioni di due variabili: il metodo delle curve di livello e del moltiplicatore di Lagrange (con dimostrazione). Cenni sulla ricerca degli estremi vincolati di funzioni di tre variabili sulle superfici di livello. Esercizi.

Esercizi 3.5.1 (Esercizi di ricapitolazione). *1. Altre quadriche riferite agli assi. Studiarle sia come superfici di livello di funzioni di tre variabili, sia come unione di grafici di funzioni di due variabili.*

(a) Sfera e ellissoide (matrice hessiana definita positiva).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(b) *Iperboloide a una falda e iperboloide a due falde (matrice hessiana non definita).*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

2. *Fare tutti gli esercizi e gli esempi del paragrafo 13.1.4 e 13.1.5. Inoltre, delle curve e delle superfici di livello considerate, determinare l'approssimazione del secondo ordine e dedurne l'andamento locale del grafico.*

3. *Studiare gli insiemi di livello e le curve di livello in vari punti delle seguenti funzioni*

$$f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\,, \quad (x+3)(y-1)\,, \quad \ln(xy)-2x+y\,.$$

   In particolare in quali punti gli insiemi di livello non sono curve di livello?

4. *Calcolo della direzione di massima crescita (decrescita) in un punto critico.*

5. *Verificare che* $x^5+x^2y^3+y^4=1$ *definisce implicitamente una funzione* $y=\varphi(x)$ *nell'intorno del punto* $P=(0,1)$*; scrivere il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione* φ *centrato in* $x=0$*; fare il disegno.*

6. *Verificare che* $x^5+x^2y^3+y^4=1$ *definisce implicitamente una funzione* $x=\phi(y)$ *nell'intorno del punto* $Q=(1,-1)$*; scrivere il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione* ϕ *centrato in* $y=-1$*; fare il disegno.*

7. *Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di livello di* $f(x,y)=x^3-3xy^5-2y$ *nel punto* $(2,1)$.

8. *Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di livello di* $(x-y)\cdot ln(e+xy-x^2+2y^2)-1$ *nel punto* $(2,1)$.

9. *Disegnata la curva* $y^2-4x^2+4x^4=0$*, vedere in quali punti non si può applicare il teorema della funzione implicita.*

10. *Determinare e disegnare gli insiemi di livello di* $f(x,y)=(x+3)(y-2)$ *e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.*

11. *Determinare e disegnare gli insiemi di livello di* $f(x,y)=3x^2+y^2-4$ *e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.*

12. *Determinare e disegnare gli insiemi di livello di* $f(x,y)=x-(y-3)^2$ *e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.*

13. *Studiare, in un intorno di* $(0,1,0)$*, la superficie* $x^3+ye^{2z}+\sin(xyz)=1$.

14. *Dire se* $(0,0,2)$ *è un punto regolare dell'insieme* $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=x^5+y^2z=0\}$ *ed in questo caso determinarne il piano tangente in* $(0,0,2)$.

15. *Dire se* $(0,0,2)$ *è un punto regolare dell'insieme* $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=z\cdot\arctan(xy)-z+2=0\}$ *ed in questo caso determinarne il piano tangente in* $(0,0,2)$.

16. *Dire se* $(0,0,2)$ *è un punto regolare dell'insieme* $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=z\cdot e^x+y\ln(z)-3x\cos(y)-2=0\}$ *ed in questo caso determinarne il piano tangente in* $(0,0,2)$.

17. *Determinare e disegnare gli insiemi di livello di* $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ *e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.*

18. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definita da* $f(x, y) = x^2 - y^2$

    a. *Disegnare gli insiemi di livello e le linee di livello di* f.
    b. *Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di* f *vincolata a* $x^2/4 + y^2/9 = 1$ *e calcolarli.*
    c. *Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di* f *vincolata all'insieme* $x^2/4 + y^2/9 \leq 1$ *e calcolarli. Illustrare quanto fatto con un disegno.*
    d. *Calcolare la derivata di* f *in direzione del vettore* $v = (1, 3)$ *nel punto* $P = (1, 1)$.
    e. *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ *definita da* $\gamma(t) = (e^t, t)$, *calcolare la derivata di* $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, *nel punto* $t = 1$, *e la matrice Jacobiana di* $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, *nel punto* $P = (1, 1)$.
    f. *Calcolare il piano tangente al grafico* $z = f(x, y)$ *nel punto* $P = (1, -2, -3)$.
    g. *In quali punti di quali insiemi di livello di* f *non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?*

19. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

    a. *Determinare l'insieme in cui* f *e' differenziabile.*
    b. *Discutere la limitatezza e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).*
    c. *Calcolare la derivata di* f *in direzione del vettore* $v = (1, 3)$ *nel punto* $P = (1, 1)$.
    d. *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ *definita da* $\gamma(t) = (t, t^2)$, *calcolare la derivata di* $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, *nel punto* $t = 1$, *e la matrice Jacobiana di* $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, *nel punto* $P = (1, 1)$.
    e. *Calcolare la retta tangente alla curva di livello* $f(x, y) = 0$ *nel punto* $P = (1, 1)$.
    f. *Enunciare il teorema della funzione implicita per la curva di livello* $f(x, y) = 0$ *nel punto* $P = (1, 1)$ *e dedurne il grafico vicino a* $P = (1, 1)$.
    g. *Quali sono i punti di* $f(x, y) = 0$ *in cui non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?*

20. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

    a. *Calcolare, se esiste,* $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$ *e dare la definizione di* $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$.
    b. *Discutere l'esistenza di massimo e minimo della funzione nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2 e nel cerchio aperto.*
    c. *Discutere la limitatezza di* f *e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).*
    d. *Calcolare la derivata di* f *in direzione del vettore* $v = (1, 3)$ *nel punto* $P = (0, 0)$ *e il piano tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate* $(1, -1, 0)$.
    e. *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ *definita da* $\gamma(t) = (1 - t, 1 - t^2)$, *calcolare la derivata di* $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, *nel punto* $t = 1$, *e la matrice Jacobiana di* $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, *nel punto* $P = (0, 0)$.
    f. *Calcolare il polinomio di Taylor del secondo ordine di* f *centrato nell'origine.*
    g. *Enunciare le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti affinche' un punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *sia un massimo o un minimo locale per* f. *Determinare i punti stazionari della* f *e studiarli.*

21. *Data la funzione definita da* $f(x, y, z) = z^2 + \cos(z) - xy$*, determinare in quali punti dell'insieme di livello* $f(x, y, z) = 1$*, l'insieme è una superficie di livello, cioè è possibile definire localmente una funzione implicita. Dopo aver verificato che il punto* $P_0 \equiv (0, 1, 0)$ *è uno di tali punti si determini il piano tangente alla superficie di livello (cioè al grafico della funzione implicita) e l'approssimazione del secondo ordine di tale funzione.*

22. *Determinare i punti stazionari della funzione definita da* $f(x, y, z) = x^2 - z^2 + y$ *vincolata a* $g(x, y, z) = z - xy = 0$*, sia col metodo del moltiplicatore di Lagrange, che con la parametrizzazione* $z = xy$*.*

23. *Giustificare l'esistenza del massimo e del minimo della funzione definita da* $f(x, y, z) = xy+z$ *sugli insiemi* S *e* B*, rispettivamente definiti da* $x^2+y^2+z^2 = 1$ *e* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$*. Calcolare tali valori e dove vengono raggiunti.*

24. *Disegnare nel piano la curva di livello* 1 *della funzione* $g(x, y) = x \cdot y$*, cioè l'insieme* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$*, vedere se si può applicare in tutti i suoi punti il teorema della funzione implicita, e vedere se* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *ammette massimo e minimo assoluti sul vincolo* E *(sia col metodo dei moltiplicatori di Lagrange,sia con la parametrizzazione del vincolo,sia con le curve di livello).*

25. *Vedere se sul vincolo* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *la funzione* $f(x, y) = x - y^2$ *ammette massimo e minimo assoluti e perchè, e se sì calcolarli (sia col metodo dei moltiplicatori di Lagrange,sia con la parametrizzazione del vincolo in coordinate polari,sia con la sostituzione* $y^2 = 1 - x^2$*,sia con le curve di livello).*

26. *Giustificare l'esistenza di massimo e minimo assoluti di* $f(x, y) = 4 - x - y$ *nell'insieme* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ *e calcolarli.*

27. *Giustificare l'esistenza di massimo e minimo assoluti di* $f(x, y) = e^{y^2-x^2}$ *nell'insieme* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, x^2 - y^2 \leq 0, x^2 - y - 4 \leq 0\}$ *e calcolarli.*

28. *Determinare i punti di estremo di* $f(x, y) = y^2 - 5x^2$ *vicolati a* $\Gamma =$ *triangolo di vertici* $(0, 1), (0, 2), (1, 3)$*.*

29. *Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione* $f(x, y) = y^{2x}$ *attorno al punto* $(x_0, y_0) = (1, 1)$ *fino al terzo ordine compreso.*

30. *Determinare e disegnare l'insieme* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \leq 3, |x - y| \leq 7\}$*. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo assoluti della funzione* f *ristretta a* D*, se* f *è definita da* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x$*, e calcolarli (conviene usare le curve di livello).*

3.6 Settimana 3-8/06/12.

3.6.1 Lunedí 3/06/12, lez. 65.

Esercizi.

3.6.2 Martedí 4/06/12, lez. 66-67.

Esercizi.

3.6.3 Mercoledí 5/06/12, lez. 68-69.

Esercizi.