

Corso di Laurea in Ingegneria Civile  
Analisi Matematica I  
Registro delle lezioni del primo semestre  
A.A 2011/2012

Gianna Stefani



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Testo di riferimento . . . . .	5
1.2	Altri testi consigliati . . . . .	5
1.3	Testi di esercizi e prerequisiti . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Elementi di base</b>	<b>7</b>
2.1	Settimana 12-16/09/11. Par. 1.1, 1.2, 3.1 . . . . .	7
2.1.1	Mercoledì 14/09/11 - Giovedì 15/09/11 . . . . .	7
2.2	Settimana 19-23/09/11. Par. 1.3.3, 2.1, 2.2, 2.4, 2.6. . . . .	8
2.2.1	Mercoledì 21/09/11 . . . . .	8
2.2.2	Giovedì 22/09/11 . . . . .	9
2.3	Settimana 26 - 30/09/11. Par. 2.2.2, 2.2.3, 2.3 - 2.7 . . . . .	11
2.3.1	Mercoledì 28/09/11 . . . . .	11
2.3.2	Giovedì 29/09/11 . . . . .	11
2.4	Settimana 3 - 7/09/11. Par. Appendice 1.A, 2.2.1 - 2.2.3, 2.6.1, 2.6.2, 2.8 . . . . .	12
2.4.1	Mercoledì 5/10/11 . . . . .	12
2.4.2	Giovedì 6/10/11 . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Continuità e derivabilità delle funzioni definite su intervalli</b>	<b>15</b>
3.1	Settimana 10 - 14/10/11. Par. 6.1 - 6.2 . . . . .	16
3.1.1	Mercoledì 12/10/11 . . . . .	16
3.1.2	Giovedì 13/10/11 . . . . .	17
3.2	Settimana 17 - 21/10/11. Par. 7.1,7.3-7.5 . . . . .	19
3.2.1	Mercoledì 19/10/11 . . . . .	19
3.2.2	Giovedì 20/10/11 . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Proprietà delle funzioni continue definite su intervalli</b>	<b>25</b>
4.1	Periodo 24/10-2/11/2011. Par. 6.3 - 6.5. . . . .	25
4.1.1	Mercoledì 26/10/11 . . . . .	25
4.1.2	Giovedì 27/10/11 . . . . .	25
4.1.3	Mercoledì 2/11/11 . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Calcolo differenziale delle funzioni reali di una variabile reale</b>	<b>31</b>
5.1	Periodo 3-11/11/11. Par. 7.1,7.2 . . . . .	31
5.1.1	Giovedì 3/11/11 . . . . .	31
5.2	Settimana 7-11/11/11. Par. 7.6 - 7.8 . . . . .	33
5.2.1	Mercoledì 9/11/11 . . . . .	33
5.2.2	Giovedì 10/11/11. . . . .	36
5.3	Settimana 14-18/11/11. Par. 7.9 - 7.11 . . . . .	39
5.3.1	Mercoledì 16/11/11. . . . .	39
5.3.2	Giovedì 17/11/11 . . . . .	43
5.4	Settimana 21-26/11/11. Par. 4.6, 7.12 - 7.13 . . . . .	48
5.4.1	Mercoledì 23/11/11. . . . .	48

5.4.2	Giovedì 24/11/11. . . . .	53
<b>6</b>	<b>Limiti delle funzioni reali di una variabile reale.</b>	<b>55</b>
6.1	Periodo 28/11-22/12/11. Par.3.1-3.6, 5.1-5.4,, 7.7.2, 7.12.1 . . . . .	55
6.1.1	Mercoledì 18/11/11. . . . .	55
6.1.2	Giovedì 1/12/11 . . . . .	61
6.1.3	Mercoledì 7/12/11. . . . .	63
6.1.4	Mercoledì 14/12/11 . . . . .	66
6.1.5	Giovedì 15/12/11 . . . . .	69
6.1.6	Mercoledì 21/12/11 . . . . .	71

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo file sono riportati gli argomenti delle lezioni del primo semestre, presumibilmente le lezioni sul calcolo differenziale delle funzioni reali di una variabile reale ed alcune generalità sulle equazioni differenziali, incluso il concetto di primitiva di una funzione ed alcuni metodi per il calcolo delle primitive.

Il file è organizzato come un registro delle lezioni in forma di libro ed è diviso per argomenti ( capitoli, ad esempio: Introduzione, Elementi di base ), per settimane di lezione ( sezioni, ad esempio: Settimana 12-16/09/11 ) e per giorni (sottosezioni, ad esempio: Mercoledì' 14/09/11). Per ogni settimana, nel titolo della sezione, sono indicati i paragrafi (Par.) del testo di riferimento in cui si trovano gli argomenti svolti. Le lezioni sono indicate con un numero progressivo in grassetto.

Di seguito diamo ulteriori informazioni.

- Il registro delle lezioni *va inteso anche come un programma d'esame dettagliato.*
- Sono riportati nei dettagli tutti gli argomenti svolti a lezione la cui impostazione differisce in modo sostanziale da quella del testo di riferimento. Negli altri casi, il più delle volte, ci limitiamo semplicemente ad elencare gli argomenti trattati in aula.
- Gli argomenti senza citazioni sono svolti nel testo di riferimento (e in tutti i testi di Analisi Matematica)
- Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo di riferimento.
- Saranno proposti esercizi anche non svolti a lezione. *Ulteriori esercizi sono proposti in un file a parte.*
- Nelle pagine web relative agli Anni Accademici precedenti ci sono ulteriori esercizi ed alcuni testi di prove d'esame.
- *Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali errori*

### 1.1 Testo di riferimento

*Contiene tutti gli argomenti del corso.*

- Bertsch - Dal Passo - Giacomelli, *Analisi Matematica*, seconda edizione, McGraw-Hill.

### 1.2 Altri testi consigliati

*Per gli argomenti del primo semestre consigliamo anche:*

- Giaquinta - Modica, *Note di Analisi Matematica: Funzioni di una variabile*, Pitagora.
- Adams, *Calcolo Differenziale 1*, Ambrosiana.
- Bramanti, Pagani, Salsa, *Matematica: Calcolo infinitesimale e Algebra lineare*, seconda edizione, Zanichelli.
- Bramanti - Pagani - Salsa, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli.
- Anichini - Conti, *Calcolo 1: Funzioni di una variabile*, Pitagora.

*L'elenco non è esaustivo, si può usare un qualsiasi testo di Analisi Matematica I, usando il registro delle lezioni come indice degli argomenti.*

### 1.3 Testi di esercizi e prerequisiti

*Diamo un elenco, non esaustivo, di libri di esercizi e prerequisiti. La maggior parte dei prerequisiti sono contenuti anche in ogni testo di Analisi Matematica I*

- Benevieri, *Esercizi di Analisi Matematica 1*, De Agostini.
- Salsa - Squellati, *ESERCIZI di MATEMATICA 1, calcolo infinitesimale e algebra lineare* - Zanichelli
- Marcellini - Sbordone, *Esercitazioni di Matematica 1*, Liguori.
- Boieri - Chiti, *Precorso di Matematica*, Zanichelli.
- Malafarina, *Matematica per i precorsi*, McGraw Hill.

# Capitolo 2

## Elementi di base

### 2.1 Settimana 12-16/09/11. Par. 1.1, 1.2, 3.1

#### 2.1.1 Mercoledì' 14/09/11 - Giovedì' 15/09/11

1-4 Lezioni tenute dal Prof. Spadini

*Argomenti svolti ed esercizi fatti o proposti*

- Numeri naturali, interi, razionali, reali, notazioni insiemistiche, quantificatori (pre-requisiti). Noi useremo le seguenti notazioni

$$x \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Somma prodotto e proprietà (prerequisiti).

Rappresentazione dei razionali positivi come allineamenti decimali finiti o periodici  
Rappresentazione degli irrazionali positivi come allineamenti decimali infiniti non periodici

- Relazione d'ordine ( $<$ ,  $\leq$ ) e sue proprietà (prerequisiti).

Il valore assoluto di un numero reale e le sue proprietà, notazione:  $|x| = \text{abs}(x) \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$

Proprietà di densità e di Archimede.

*Osservazione.* Tutte le proprietà fin qui menzionate sono soddisfatte anche da  $\mathbb{Q}$ .

- Maggioranti (minoranti), massimo (minimo) di un insieme, insiemi limitati e illimitati.

Estremo superiore (inferiore) di un insieme

*Proprietà di completezza (o di continuità) dei numeri reali.*

La retta reale.

Insiemi finiti

- Gli intervalli come soluzioni di disequazioni lineari.

*Intervalli limitati* di estremi  $a < b$  :

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  intervallo aperto

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  intervallo chiuso

- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

*Intervalli illimitati*

- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$  semiretta negativa aperta

- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$  semiretta negativa chiusa
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$  semiretta positiva aperta
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$  semiretta positiva chiusa
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$  retta reale

Intervalli degeneri:  $\emptyset = (a, a) = [a, a) = (a, a] , \{a\} = [a, a]$ .

**Proposizione 2.1.1.** (senza dimostrazione). Un sottoinsieme  $I$  di  $\mathbb{R}$  è un intervallo se e solo se per ogni  $a, b \in I$ ,  $a \leq b$  l'intervallo chiuso  $[a, b]$  è contenuto in  $I$ .

Lunghezza o misura di un intervallo limitato.

Definizione di distanza (par 4.1, pg.73) e sue proprietà.

Definizione di intorno di  $x_0 \in \mathbb{R}$  di raggio  $r > 0$  (par 4.1, pg.74), notazioni:

$$B_r(x_0) = I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

Rappresentazione degli intervalli in termini di distanza.

$$\text{Segno di un numero reale } x, \text{ notazione } \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

- Definizione operativa di estremo superiore (inferiore per esercizio):  
sia  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $M \in \mathbb{R}$ ,

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq a, & \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ t.c. } M - \epsilon < a (\leq M) \end{cases}$$

**Esercizi 2.1.1.** 1. *Analisi (cioè analizzare le relazioni ed il significato) e dimostrazione (facoltativa) delle proposizioni*

- $\sqrt{2}$  non è razionale
- $\nexists x \in \mathbb{Q}$  tale che  $x^2 = 2$
- $\nexists x \in \mathbb{Q}, x > 0$  tale che  $x^2 = 2$
- $x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}$  non è completo

2. *Provare le seguenti proprietà del valore assoluto:*

- $|a| \geq 0$
- $|ab| = |a||b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$ . (facoltativo)

3. *Determinare sup, inf e, se esistono, max, min dei seguenti insiemi*

$$\{1/(n+3) : n \in \mathbb{N}\} \quad \{1/n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \quad \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x^2 \leq 9\}$$

## 2.2 Settimana 19-23/09/11. Par. 1.3.3, 2.1, 2.2, 2.4, 2.6.

### 2.2.1 Mercoledì 21/09/11

#### 5. Generalità sul corso

Complementi ed esercizi sui numeri reali

- Esercizi 2.2.1.**
1. Definizione di radice  $n$ -sima di un numero reale, esempio  $\sqrt{x^2} = |x|$
  2. Dimostrare che il punto medio di due numeri reali,  $x, y$ , è dato da  $\frac{x+y}{2}$  (si consiglia di usare la nozione di valore assoluto). Relazione fra le diverse notazioni di intervalli limitati (chiusi e aperti)
  3. Verificare che:  $|x| = \sqrt{x^2} = x \operatorname{sgn}(x) = \max\{x, -x\}$ .
  4. La retta reale è un intervallo e gli intervalli degeneri.
  5. Determinare estremi superiore, inferiore,  $\max$ ,  $\min$ , degli intervalli.
  6. Analisi o/e dimostrazione delle seguenti proposizioni:
    - (a)  $M \neq \sup A$
    - (b)  $A$  è illimitato
    - (c)  $0 = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
    - (d)  $1/1000 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
    - (e)  $-1 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
  7. Dimostrare le seguenti proposizioni.  
 $M = \max A \Rightarrow M = \sup A$   
 $M = \max A \Leftrightarrow M = \sup A$  e  $M \in A$   
 $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$   
 $\exists \max A \Leftrightarrow \sup A \in A$
  8. Enunciare e dimostrare proposizioni analoghe alle precedenti per l'estremo inferiore e il minimo.

**6.** Definizione di funzione (o applicazione) da un insieme  $X$  a un insieme  $Y$  dominio, codominio. Notazioni:

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) \quad \text{oppure} \quad f : x \in X \mapsto f(x) \in Y$$

Immagine, grafico, equazione del grafico di una funzione.

Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione inversa.

Restrizione di una funzione, retroimmagine di un insieme.

Definizione di funzione identità in o su un insieme  $X$ , notazione:  $I_X : x \in X \mapsto x \in X$ .

Esempio:  $(x^3)^{1/3}$

### 2.2.2 Giovedì 22/09/11

**7.** Funzioni reali di una variabile reale: *convenzione sul dominio* (dominio naturale, campo di esistenza). Notazioni: invece di scrivere: " $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ " scriviamo: " $f : x \mapsto 1/x$ " oppure " $f$  definita da  $y = 1/x$ " oppure " $f$  definita da  $f(x) = 1/x$ ".  
 Relazioni fra il grafico e dominio, immagine, iniettività, suriettività.  
 Relazione fra immagine, iniettività, suriettività ed il concetto di soluzione di una equazione.

- Esercizi 2.2.2.**
1. Quale dei seguenti insiemi rappresenta il grafico di una funzione reale di variabile reale?  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ .
  2. Scrivere in forma esplicita la funzione  $x \mapsto f(x)$  il cui grafico è dato da  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - x = 4, y \geq 0\}$  e determinarne dominio, immagine, iniettività.

3. Determinare, usando la definizione, dominio, immagine, suriettività della funzione  $f$  definita da  $y = x^2 + 2x + 5$ .
4. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:  $|x + 4| < |x - 3|$ ,  $x^2 - 4 < 0$ ,  $x^2 \geq 8$ ,  $x^2 \geq -5$ ,  $x^2 \leq -5$ .

Funzioni definite a tratti.

Grafico della funzione valore assoluto e della funzione segno.

Esempi e esercizi

### 8. Le potenze.

Ricordare che sono definite:

- $a^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$
- $a \neq 0$ ,  $a^0 = 1$ , non si definisce  $0^0$
- $a^n$ , con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ , con  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{Z}$
- $0^{m/n} = 0$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \neq 0$ ,
- **Attenzione:** se  $a < 0$  non si definisce  $a^{m/n}$

Cenni sulle potenze ad esponente reale:

$$\begin{cases} a^x = \sup\{a^{m/n} : m/n \in \mathbb{Q}, m/n \leq x\}, & \text{se } a > 1, x \in \mathbb{R} \\ a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}, & \text{se } 0 < a < 1, x \in \mathbb{R} \\ 1^x = 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Grafici delle funzioni potenze intere.

**Riguardare le proprietà delle potenze e la definizione e le proprietà dei logaritmi.**

**Esercizi 2.2.3.** 1. Riflettere sulla differenza fra le parole: *variabile, parametro e incognita*.

2. Definire come funzioni definite a tratti  $f(x) =$

$$|x - 3|, \quad |1/(x - 3)|, \quad |2x/(x^2 - 1)|$$

3. Determinare dominio, immagine, grafico, eventuale funzione inversa e proprietà delle funzioni definite da  $f(x) =$

$$1/x, \quad 1/x^n, n \in \mathbb{N}, \quad x^2 - 2x \text{ su } (0, 2)$$

4. Usando la definizione provare che la funzione definita da  $f(x) = x^3 - x$  non è iniettiva.

5. Usando la definizione provare che la funzione definita da  $y = 3x + 2$  è invertibile e determinarne l'inversa.

6. Della funzione definita da  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 2 \\ 1/x & \text{se } x > 2 \end{cases}$ , determinare dominio, immagine, grafico.

7. Data la funzione  $f : x \mapsto x^4 - \frac{3}{4}x^2$ , determinare  $f^{-1}((\frac{1}{4}, +\infty))$

8. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e interpretarle in termini di grafici:

$$\sqrt{x-1} < x-3, \quad \frac{2}{x} + 3 < \frac{4}{x} - 1, \quad \frac{3}{x^2} + 1 \leq x^2 - 1, \quad \sqrt{x-1} < \sqrt{x},$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} > 3 - x, \quad |x^2 - 4x - 5| > -x, \quad \sqrt{-x} < 5 + x.$$

9. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

- 1)  $x \geq 5$  implica  $x^2 > 30$ ,
- 2)  $x = 0$  se e solo se  $x^2 = 0$ ,
- 3)  $x^3 \geq 8$  implica  $x \geq 2$ ,
- 4)  $x \geq 5$  è equivalente a  $x^2 = 25$ ,
- 5)  $x > 5$  implica  $x^2 > 25$ ,
- 6)  $x^2 > 25$  implica  $x > 5$ .

## 2.3 Settimana 26 - 30/09/11. Par. 2.2.2, 2.2.3, 2.3 - 2.7

### 2.3.1 Mercoledì 28/09/11

9. Funzioni pari e dispari. Funzioni invertibili, funzione inversa e suo grafico.

**Esercizio.** Delle funzioni che compaiono nell'Esercizio 2.2.3, determinare se sono pari o dispari; inoltre, se esistono, determinare le funzioni inverse e il loro grafico.

Grafici delle funzioni radici intere e differenza fra le funzioni  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  e  $x \mapsto x^{1/n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ . Grafici delle funzioni potenze reali,  $x \mapsto x^b$  al variare del parametro  $b \in \mathbb{R}$ .

10. Grafici delle funzioni esponenziali,  $\exp_a : x \mapsto a^x$  al variare del parametro  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Grafico delle funzioni logaritmiche,  $\ln_a : x \mapsto \ln_a(x)$  al variare del parametro  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Le notazioni  $\exp = \exp_e$  e  $\ln = \ln_e$ .

Le funzioni:  $x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ ,  $x \mapsto g(x)^{f(x)} = e^{f(x) \ln(g(x))}$

**Esercizio.** Dall'uguaglianza  $x = a^{\ln_a(x)}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , dedurre la seguente uguaglianza fra funzioni  $x \mapsto \ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ .

### 2.3.2 Giovedì 29/09/11

11. Funzioni limitate. Estremo superiore (inferiore) e massimo (minimo) di una funzione. Punti di massimo (minimo).

Operazioni con le funzioni: somma, prodotto, quoziente, composizione.

Funzioni composte e loro dominio.

**Esempio:** date  $f : x \mapsto x^2$  e  $g : x \mapsto \sqrt{x}$ , calcolare dominio, immagine ed equazione del grafico di  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .

Operazioni sui grafici: confronto fra i grafici di  $f$  e

1.  $-f$ ,  $|f|$ ,  $x \mapsto f(-x)$ .
2.  $x \mapsto f(ax)$ ,  $x \mapsto bf(x)$ , con  $a, b > 0$ ,  $a, b \leq 0$  per esercizio, (cambiamento di scala).
3.  $x \mapsto f(x-a)$ ,  $x \mapsto b+f(x)$ , con  $a, b > 0$ ,  $a, b \leq 0$  (traslazioni orizzontali e verticali).

12. La funzione parte positiva  $f^+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$

La funzione parte negativa  $f^- : x \mapsto \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$

**Riguardare la definizione di radiante, le formule di trigonometria e le funzioni trigonometriche.**

**Esercizi 2.3.1.** 1. Determinare, usando la definizione, immagine, iniettività, suriettività della funzione definita da  $f(x) = x^2 + 2x + 5$ . Determinare inoltre estremo superiore, inferiore ed eventuali massimo, minimo, punti di massimo, punti di minimo.

2. Delle funzioni definite nell'Esercizio 2.2.3 determinare estremo superiore, inferiore, eventuali massimi e minimi e punti di massimo e di minimo.

3. Date  $f$  e  $g$  funzioni reali di variabile reale, provare che:

$$(a) g = f^{-1} \implies g \circ f = I_{D_f}, f \circ g = I_{D_g}, g^{-1} = f.$$

$$(b) f, g \text{ iniettive (suriettive)} \implies g \circ f \text{ iniettiva (suriettiva)}$$

$$(c) g \circ f \text{ iniettiva} \implies f \text{ iniettiva}$$

$$(d) g \circ f \text{ suriettiva} \implies g \text{ suriettiva}$$

4. Scrivere le funzioni ottenute applicando operazioni sui grafici sopra definite alla funzione  $f : x \mapsto x^2 - 2x$  e disegnarne i grafici.

5. Disegnare il grafico della funzione definita da  $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 - 2(x-3) + 2 & \text{se } x \leq 2 \\ 7/(x+3) & \text{se } x > 2 \end{cases}$ , e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

6. Disegnare il grafico della funzione definita da  $f(x) = ||x^2 - 4x| - 2|$ , e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

## 2.4 Settimana 3 - 7/09/11. Par. Appendice 1.A, 2.2.1 - 2.2.3, 2.6.1, 2.6.2, 2.8

### 2.4.1 Mercoledì 5/10/11

13. Misura dell'angolo in radianti e funzioni trigonometriche. Funzioni periodiche. Le funzioni trigonometriche inverse.

**Definizione 2.4.1.** • La funzione  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , è definita da

$$\arcsin = (\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]})^{-1}$$

• La funzione  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , è definita da

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}$$

• La funzione  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ , è definita da

$$\arctan = (\tan|_{(-\pi/2, \pi/2)})^{-1}$$

Guardare sul libro il grafico delle funzioni trigonometriche inverse e svolgere gli esercizi proposti.

14. Esercizi.

## 2.4.2 Giovedì 6/10/11

15. Funzioni monotone e strettamente monotone: crescenti (decrescenti), strettamente crescenti (decrescenti).

16. Equazioni e disequazioni: metodo grafico. Esercizi.

**Esercizi 2.4.1.** *Dimostrare che*

1. La funzione  $f$  definita da  $f(x) = 1/x$  non è monotona ma lo è su  $(-\infty, 0)$  e su  $(0, +\infty)$ , cioè lo sono le sue restrizioni a  $(-\infty, 0)$  e a  $(0, +\infty)$
2. Dimostrare che una funzione strettamente crescente è iniettiva, secondo il seguente schema:  
*Ipotesi (Hp)*  
*Tesi (Ts)*  
*Dimostrazione.*
3. Una funzione strettamente crescente (decrescente) è crescente (decrescente), ma il viceversa non vale.
4.  $f$  è monotona se e solo se il prodotto  $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1))$  non cambia mai segno, per ogni  $x_1$  e  $x_2$  nel dominio. Come posso esprimere in termini analoghi che è strettamente crescente (decrescente)?
5. Se  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente monotona, allora è anche iniettiva e quindi invertibile.
6. La funzione  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1), \\ 3 - x & x \in [1, 2] \end{cases}$ , è iniettiva ma non è monotona in  $[0, 2]$ .
7. Date  $f$  e  $g$  funzioni reali di variabile reale
  - (a)  $f, g$  monotone (strettamente)  $\implies g \circ f$  monotona (strettamente), più precisamente:  $f, g$  crescenti o decrescenti  $\implies g \circ f$  crescente, e ... completare i casi.



## Capitolo 3

# Continuità e derivabilità delle funzioni definite su intervalli

Anche se i concetti di continuità e derivabilità si possono dare per funzioni il cui dominio è un insieme più generale, ho preferito limitarmi al caso più semplice di funzioni definite su intervalli. Naturalmente prenderemo in considerazione anche funzioni il cui dominio è unione disgiunta di intervalli, studiandone le proprietà su ciascun intervallo.

Daremo per prima cosa le definizioni di continuità e derivabilità (necessarie al corso di fisica), ritornando in seguito alle proprietà di cui godono le funzioni continue e differenziabili.

L'impostazione da me seguita nell'esposizione del concetto di continuità differisce da quella del testo di riferimento, dove la continuità è trattata dopo i limiti. Fra quelli consigliati, il testo di Giaquinta - Modica segue questa impostazione.

Il legame fra le due impostazioni consiste semplicemente nel fatto che qui viene data direttamente la definizione di  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , invece di passare attraverso la definizione di limite. Riporteremo anche la definizione di  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , per permettere il confronto fra le due impostazioni.

Anche l'impostazione da me seguita nell'esposizione del concetto di derivabilità differisce da quella del testo di riferimento (e da quella di tutti i testi che conosco), dove la derivabilità è trattata mediante il concetto di limite; la mia impostazione segue quella seguita dal Prof. Massimo Furi della nostra Facoltà.

Ritengo questa impostazione, oltre che semplice e molto rigorosa, particolarmente utile nel nostro corso perchè ci permette di arrivare rapidamente al concetto di derivata (necessario al corso di fisica) e rimandare il concetto più delicato di limite.

Il legame fra l'impostazione da me seguita e quella del testo consiste nel fatto che qui viene data la definizione di derivabilità in  $x_0$ , dicendo che il rapporto incrementale è estendibile per continuità a  $x_0$ .

Avendo a disposizione il concetto di limite per funzioni definite su intervalli, lo studente che lo preferisca, può seguire l'impostazione del testo, purché in sede d'esame sia preparato sugli argomenti richiesti in modo coerente.

L'enunciato dei teoremi e la maggior parte delle dimostrazioni può essere consultata sul testo di riferimento, comunque molti degli argomenti svolti saranno riportati nei dettagli.

**In quanto segue il dominio delle funzioni sarà un intervallo o unione di intervalli.** Ricordarsi che anche le semirette e la retta reale sono intervalli.

### 3.1 Settimana 10 - 14/10/11. Par. 6.1 - 6.2

#### 3.1.1 Mercoledì 12/10/11

**17.** Intuitivamente, affermare che una funzione  $f$  è continua in un punto  $x_0 \in D_f$  significa che l'immagine  $f(x)$  di un punto  $x$  del dominio di  $f$  si può rendere vicina quanto si vuole a  $f(x_0)$  purché si prenda  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ . In altre parole, se ci viene dato un arbitrario margine di errore  $\epsilon > 0$  e ci viene chiesto di far sì che la distanza  $|f(x) - f(x_0)|$  tra  $f(x)$  e  $f(x_0)$  risulti minore dell'errore assegnato, deve essere possibile (almeno teoricamente) determinare un intorno  $I(x_0, \delta)$  del punto  $x_0$  con la proprietà che per tutti i punti  $x$  di tale intorno (che appartengono anche al dominio di  $f$ ) il valore  $f(x)$  approssimi  $f(x_0)$  con un errore inferiore ad  $\epsilon$ .

**Definizione 3.1.1.** Una funzione (reale di variabile reale)  $f$  si dice continua in un punto  $x_0$  del dominio  $D_f$  se fissato un arbitrario  $\epsilon > 0$  esiste un numero  $\delta > 0$  con la proprietà che da  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in D_f$  segue  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . In formule:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in D_f \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

o anche

$$\forall I(f(x_0), \epsilon), \exists I(x_0, \delta) \quad \text{t.c.} \quad f(I(x_0, \delta) \cap D_f) \subset I(f(x_0), \epsilon).$$

**Esempio.** Verificare che la funzione  $I_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$  è continua in  $x_0 = 0$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\epsilon > 0$ , la disequazione  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  nel presente caso è data da  $|x| < \epsilon$ , che ha fra le sue soluzioni l'intervallo  $I(0, \epsilon/2)$ . Cioè dato  $\epsilon > 0$  abbiamo trovato  $\delta = \epsilon/2$  (ma anche  $\delta = \epsilon, \epsilon/4, \dots$  va bene) con le richieste proprietà.  $\square$

**Esempio.** La funzione segno non è continua nel punto  $x_0 = 0$ .

*Dimostrazione.* Se scegliamo un intorno di  $\text{sgn}(0) = 0$  di raggio  $\epsilon = 1/2$ , non è possibile trovare un intorno  $I(0, \delta)$  di 0 che viene (interamente) mandato in  $I(0, 1/2)$ . Infatti  $I(0, 1/2) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .  $\square$

**Esercizio.** La funzione  $\cos$  è continua nel punto  $x_0 = 0$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\epsilon > 0$  (si può supporre che  $\epsilon < 1$ ), e consideriamo la disequazione  $|\cos(x) - 1| < \epsilon$ . Tale disequazione, per le proprietà del coseno, equivale alla disequazione  $\cos(x) > 1 - \epsilon$ , che fra le sue soluzioni ha  $|x| < \arccos(1 - \epsilon)$ . Riassumendo dato  $\epsilon \in (0, 1)$ , se scegliamo  $\delta = \arccos(1 - \epsilon)$ , otteniamo che se  $x \in I(0, \delta)$ , allora  $|\cos(x) - \cos(0)| < \epsilon$ .  $\square$

$f$  è continua in  $x_0 \in D_f$  se e solo se la restrizione di  $f$  ad ogni intervallo  $I$  tale che  $x_0 \in I \subset D_f$  è continua in  $x_0$ .

Se  $f$  non è continua in  $x_0$  si dice che  $f$  è *discontinua* in  $x_0$  o che ha una *discontinuità* in  $x_0$ .

Se  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio, allora si dice semplicemente che è una funzione *continua*, altrimenti si dice che è *discontinua*.

Se  $f$  è continua in ogni punto di  $A \subset D_f$ , si dice che è continua in  $A$  e si scrive  $f \in C^0(A, \mathbb{R})$  o semplicemente  $f \in C^0(A)$ , se il codominio è noto, come in questa parte del nostro corso.

Se una funzione è continua in un intervallo, allora è continua anche la sua restrizione ad un qualunque sottointervallo.

**Osservazione importante.** In base alla definizione,  $f$  è discontinua se non è vero che è continua in ogni punto del suo dominio; cioè se esiste (almeno) un punto **del dominio** in cui  $f$  è discontinua (ricordarsi di come si nega una proposizione). Quindi, a differenza di ciò che si legge in alcuni libri, non ha senso l'affermazione "la funzione  $1/x$  non è continua perché ha una discontinuità nel punto  $x_0 = 0$ ", dato che detto punto non appartiene al dominio della funzione. Invece la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}, \text{ è discontinua in } x_0 = 0, \text{ qualsiasi sia } a \in \mathbb{R}.$$

**18.** Diamo adesso la definizione di limite finito per la variabile che tende ad un punto di  $\mathbb{R}$ , adattandola a funzioni definite su intervalli.

**Definizione 3.1.2** (formula (3.8)). Sia  $I$  un intervallo,  $x_0$  un punto di  $I$  o un suo estremo e sia  $\ell \in \mathbb{R}$ . Sia  $f$  una funzione definita su  $I \setminus \{x_0\}$  (può anche essere definita su tutto  $I$ ). Si dice che il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  è  $\ell$  e si scrive  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un numero  $\delta > 0$  con la proprietà che da  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in I \setminus \{x_0\}$  segue  $|f(x) - \ell| < \epsilon$ .

Si dice che il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra è  $\ell$  e si scrive  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

se  $x_0$  non è l'estremo destro e per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un numero  $\delta > 0$  con la proprietà che da  $0 < x - x_0 < \delta$  e  $x \in I$  segue  $|f(x) - \ell| < \epsilon$ .

Si dice che il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da sinistra è  $\ell$  e si scrive  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$

se  $x_0$  non è l'estremo sinistro e se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un numero  $\delta > 0$  con la proprietà che da  $0 < x_0 - x < \delta$  e  $x \in I$  segue  $|f(x) - \ell| < \epsilon$ .

Si osservi che la definizione di limite è indipendente dall'eventuale valore che la funzione assume in  $x_0$ .

**Esercizio.** Riconoscere che  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Esercizio.** Verificare che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

*Dimostrazione.* Per  $x \in (0, \pi/4)$  vale:  $\sin(x) < x < \tan(x)$  (si deducano le disuguaglianze confrontando la corda con l'arco e l'area del settore circolare col triangolo circoscritto); dividendo per  $\sin(x)$  e considerando i reciproci, otteniamo:  $\cos(x) < \sin(x)/x < 1$ , da cui  $0 < 1 - \sin(x)/x < 1 - \cos(x)$ . Fissiamo  $\epsilon \in (0, 1)$ ; la disequazione  $|\sin(x)/x - 1| < \epsilon$  ha, fra le sue soluzioni, le soluzioni di  $x \in (0, \pi/4)$ ,  $0 < 1 - \sin(x)/x < \epsilon$ . Da  $x \in (0, \pi/4)$ ,  $0 < 1 - \sin(x)/x < 1 - \cos(x)$  e dal fatto che  $\sin(x)/x$  è pari, deduciamo che, scegliendo  $\delta = \arccos(1 - \epsilon)$ , da  $x \in I(0, \delta)$ , segue  $|\sin(x)/x - 1| < \epsilon$ .  $\square$

### 3.1.2 Giovedì 13/10/11

**19-20. Esempi.** Continuità delle funzioni elementari.

**Teorema 3.1.1.** (senza dimostrazione). Ogni funzione ottenuta combinando funzioni continue tramite operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione è continua. Più precisamente:

se  $f$  è continua in un punto  $x_0$  e  $g$  è continua in  $f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  risulta continua in  $x_0$ ,

se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$ , allora  $f + g$ ,  $fg$  sono continue in  $x_0$ ,

se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , allora  $f/g$  è continua in  $x_0$ .

**Teorema 3.1.2.** (senza dimostrazione). Sia  $J$  un intervallo e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua invertibile, allora  $f^{-1} : f(J) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua.

**Definizione 3.1.3.** Una funzione  $f$  si dice continua a destra in  $x_0 \in D_f$  se esiste  $\delta > 0$  tale che la restrizione  $f|_{[x_0, x_0 + \delta)}$  è continua in  $x_0$ . Analoga definizione vale per la continuità a sinistra.

**Definizione 3.1.4.** Una funzione  $f$  definita in  $I \setminus \{x_0\}$  si dice estendibile per continuità a  $x_0$  se esiste una funzione  $\tilde{f}$  definita in  $I$  e continua in  $x_0$  che coincide con  $f$  in  $I \setminus \{x_0\}$

**Esempi.** Le potenze a esponente reale  $f_b : x \mapsto x^b$ ,  $b > 0$ , sono estendibili per continuità a  $x_0 = 0$  e si considerano estese  $x_0 = 0$  col valore 0, cioè  $D_{f_b} = [0, +\infty)$  e  $f_b(0) = 0$ . La funzione  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ , è estendibile per continuità a  $x_0 = 0$ , col valore  $f(0) = 1$ .

**Definizione 3.1.5.** Sia  $x_0$  un punto di discontinuità per una funzione  $f$ .

$x_0$  si dice discontinuità eliminabile se esiste una funzione  $\tilde{f}$  che coincide con  $f$  in  $D_f \setminus \{x_0\}$  ed è continua in  $x_0$ .

$x_0$  si dice discontinuità di salto se esistono  $\ell^+, \ell^-, \ell^+ \neq \ell^-$  tali che  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ .

**Esercizi 3.1.1.** 1. Provare che le funzioni costanti, la funzione identità, la funzione valore assoluto e la funzione  $x \mapsto 1/x$  sono continue.

2. Provare che la funzione segno è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. Mostrare che se due funzioni coincidono in un intorno di un punto  $x_0$  e una di esse è continua in tal punto, anche l'altra lo è.

4. Verificare che una funzione definita su un intervallo  $I$  è continua in  $x_0 \in I$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

5. Verificare che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$ .

6. Dimostrare che se  $f$  è continua in un punto  $x_0$  e  $g$  è continua in  $f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  risulta continua in  $x_0$ .

7. Dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$ , allora  $f + g$  è continua in  $x_0$ , usando lo schema : ipotesi, tesi, dimostrazione.

8. Siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite nello stesso dominio. Dedurre, dal teorema di continuità delle funzioni combinate, che se una sola delle due è discontinua, allora anche  $f + g$  è discontinua.

9. Dal teorema sulla continuità delle funzioni combinate dedurre che i monomi  $x \mapsto ax^n$  sono funzioni continue.

10. Dal teorema sulla continuità delle funzioni combinate dedurre che i polinomi e le funzioni razionali sono funzioni continue.

11. Verificare che la funzione  $x \mapsto x^x$  coincide con la funzione  $x \mapsto e^{x \ln(x)}$  e dedurre che è continua. Più in generale se  $f$  e  $g$  sono funzioni reali di variabile reale continue, la funzione  $x \mapsto g(x)^{f(x)} = e^{f(x) \ln(g(x))}$  è continua.

12. Usando la definizione di continuità verificare che se  $x_0 \in (a, b) \subset D_f$  allora  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se è continua a destra e a sinistra in  $x_0$ , se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$ .

13. Continuità delle funzioni definite a tratti: per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  le seguenti funzioni sono continue?

$$x \mapsto \begin{cases} 1/x + k & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} 1/x + k & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$$

14. Sia  $I$  un intervallo ed  $f$  una funzione continua in  $I \setminus \{x_0\}$ . Verificare che  $f$  è estendibile per continuità in  $x_0$  se e solo se esiste  $\ell \in \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

15. La funzione  $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$ , è estendibile per continuità a  $x_0 = -1$ , con quale valore?

16. Disegnare col computer la funzione  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ , e controllare graficamente che è estendibile per continuità a  $x_0 = 0$ , col valore  $f(0) = 1$ .

## 3.2 Settimana 17 - 21/10/11. Par. 7.1,7.3–7.5

### 3.2.1 Mercoledì 19/10/11

#### 21 - 22

**Definizione 3.2.1.** Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in A$ . La funzione  $r_{x_0}: A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$r_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

si chiama rapporto incrementale di  $f$  nel punto  $x_0$ . Se non ci sono ambiguità sul punto, si indica anche con  $x \mapsto r(x)$ .  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ , si chiama incremento della funzione (o della variabile dipendente) e il denominatore,  $\Delta x = x - x_0$ , si dice incremento della variabile (o della variabile indipendente).

Il lemma seguente ci permetterà di dare la definizione di derivata senza usare la definizione di limite, usando invece la nozione di continuità.

**Lemma 3.2.1.** Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in A$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti

1. La funzione  $r_{x_0}$  è estendibile per continuità a  $x_0$
2. Esiste una funzione  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $x_0$  e tale che

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall x \in A.$$

*Dimostrazione.* Per esercizio (si noti che  $\varphi$  coincide con  $r_{x_0}$  estesa).  $\square$

**Definizione 3.2.2.** Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in A$ . Si dice che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se esiste una funzione  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $x_0$  e tale che

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall x \in A.$$

Equivalentemente, si dice che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se la funzione rapporto incrementale,  $r_{x_0}$ , è estendibile per continuità a  $x_0$ . Il numero  $\varphi(x_0)$  (che coincide col valore esteso  $r_{x_0}(x_0)$ ) si chiama derivata di  $f$  in  $x_0$  e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad D_{x_0}f, \quad Df(x)|_{x=x_0}.$$

**Lemma 3.2.2.** Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in A$ .  $f$  è derivabile in  $x_0$  con derivata  $f'(x_0)$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

*Dimostrazione.* Per esercizio. Si noti anche che questo lemma vuol dire che posso dare la definizione di derivata mediante quella di limite. Si consiglia, come utile esercizio di comprensione del linguaggio matematico, di dare la definizione di derivata mediante la nozione di limite e quindi stabilire l'enunciato di un lemma che dia le proprietà del rapporto incrementale e l'esistenza della funzione  $\varphi$ . Si tratta cioè di scambiare i ruoli fra la Definizione 3.2.2 ed il Lemma 3.2.2.  $\square$

Una funzione  $f$  definita su una unione di intervalli  $A$  si dice *derivabile* se è derivabile in ogni punto di  $A$ .

**Lemma 3.2.3.** *Se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in un punto  $x_0$ , allora in quel punto è anche continua.*

*Dimostrazione.* Con l'impostazione scelta, la dimostrazione di questo lemma è particolarmente semplice, infatti, dalla definizione di funzione derivabile segue che

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0),$$

dove  $\varphi(x)$  è continua in  $x_0$ . Di conseguenza  $f(x)$  si può esprimere come somma e prodotto di funzioni continue in  $x_0$ .  $\square$

**Esercizio da fare.** Riconoscere che il Lemma 3.2.3 potrebbe essere espresso anche mediante le due seguenti proposizioni che sono equivalenti al suo enunciato.

- *La derivabilità è una condizione sufficiente per la continuità.*
- *La continuità è una condizione necessaria per la derivabilità.*

**Esempi.** Derivabilità delle funzioni costanti, della funzione identità, della funzione segno, della funzione valore assoluto e delle funzioni  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^b$ ,  $b > 0$ .

**Teorema 3.2.1.** *Ogni funzione ottenuta combinando funzioni derivabili tramite operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione è derivabile. Più precisamente:*

- *se  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili in  $x_0$ , allora lo sono anche  $f + g$ ,  $fg$  e risulta (l'unicità dipende dalla stretta crescita di  $f$ )  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$  e  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ,*
- *se  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , allora lo è anche  $f/g$  e risulta  $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ ,*
- **regola della catena**, *se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $g$  è derivabile in  $f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$  e risulta  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ . (l'unicità dipende dalla stretta crescita di  $f$ )*

*Dimostrazione*(facoltativa). La dimostrazione è riportata nell'esercizio 3.2.2 n. 9

**Teorema 3.2.2** (senza dimostrazione). *Per le seguenti funzioni si ha:*

1.  $D(k) = 0$ , se  $k$  è una funzione costante
2.  $D(x^n) = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $D(x^b) = bx^{b-1}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  se  $b < 1$ ,  $x \geq 0$  se  $b > 1$ .
4.  $D \exp(x) = \exp(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
5.  $D \sin(x) = \cos(x)$ ,  $D \cos(x) = -\sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
6.  $D \tan(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$ ,  $x \neq \pi/2 + k\pi$

**Osservazioni.** i. La notazione per le prime tre delle precedenti formule non è corretta, ciò dipende dal fatto che non disponiamo di un "simbolo" per le funzioni potenze e le funzioni costanti. La uso per tradizione e per non appesantire la scrittura. (l'unicità dipende dalla stretta crescita di  $f$ ) In maniera analoga si usa anche scrivere  $D(e^x) = e^x$ .

ii. La formula n. 3 del Teorema 3.2.2 è valida per  $x \in (0, +\infty)$  se  $b < 1$  e per  $x \in [0, +\infty)$  se  $b \geq 1$ , dimostrarlo per esercizio (questo esercizio è stato svolto a lezione).

**Esercizio da fare.** Usare il n. 3 del Teorema 3.2.2 per provare

$$D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1$$

e determinare, in dipendenza da  $n$ , per quali  $x \in \mathbb{R}$  è valida l'uguaglianza.

**Esempi.** Derivata di un polinomio, derivata delle funzioni  $x \mapsto 3^x$ ,  $a^x$ ,  $\cos(x^2 - 2x + 3)$ .

**Esercizi 3.2.1.** 1. Provare che se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è costante, allora è derivabile e  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

2. Provare che la funzione definita da  $f(x) = x$  è derivabile e si ha  $f'(x) = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

3. (l'unicità dipende dalla stretta crescenza di  $f$ ) Provare che la funzione definita da  $f(x) = x^2$  è derivabile e calcolarne la derivata.

Suggerimento. Partire dall'uguaglianza:  $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

4. Provare che la funzione definita da  $f(x) = x^n$  è derivabile e calcolarne la derivata.

Suggerimento. Partire dall'uguaglianza

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}).$$

5. Provare che le funzioni definite da  $f(x) = |x|$ ,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\sqrt{|x|}$  non sono derivabili in  $x_0 = 0$

### 3.2.2 Giovedì 20/10/11

**23 - 24.** Se una funzione  $f$  definita su una unione di intervalli  $A$  è derivabile, la funzione  $f' = Df: A \rightarrow \mathbb{R}$  che ad ogni  $x \in A$  assegna il numero  $f'(x)$  si chiama *derivata* di  $f$ . Inoltre se  $f'$  è continua su  $A$ , si dice che  $f$  è di classe  $C^1$  su  $A$  e si scrive  $f \in C^1(A)$ .

Con queste notazioni, mediante i Teoremi 3.2.1 e 3.1.1, possiamo affermare che gli insiemi  $C^0(A)$  e  $C^1(A)$  sono spazi vettoriali e che l'applicazione derivata

$$D: f \in C^1(A) \rightarrow f' \in C^0(A)$$

è lineare.

**Teorema 3.2.3.** (senza dimostrazione). Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e invertibile. Se  $f$  è derivabile in un punto  $x_0 \in J$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora  $f^{-1}$  è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

cioè

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(x_0)))}.$$

**Esercizio da fare.** Usare il teorema sulla derivata della funzione inversa e le regole di derivazione date nel Teorema 3.2.2 per stabilire le seguenti formule di derivazione, determinando anche per quali  $x \in \mathbb{R}$  sono valide.

1.  $D \ln(x) = \frac{1}{x}$ .

2.  $D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

3.  $D \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , e  $D \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ , .

Le derivate delle funzioni “elementari” vanno sapute a memoria e lo studente è tenuto ad esercitarsi sulle regole di derivazione.

**Esercizi 3.2.2.** 1. Guardare sul testo la tabella delle derivate e gli esempi relativi.

2. Dalle derivate delle funzioni  $\sin$  e  $\cos$  dedurre la derivata della funzione  $\tan$ .
3. Determinare  $D(\sqrt{x})$  e  $D(\sqrt[3]{x})$  specificando per quali  $x$  sono valide.
4. Determinare la derivata dei polinomi e delle funzioni razionali
5. Calcolare la derivata della funzione  $f : x \mapsto x^x$  e più in generale della funzione  $x \mapsto g(x)^{f(x)}$
6. Calcolare  $D(a^x)$  e  $D(\ln_a(x))$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .
7. Calcolare la derivata in  $y_0 = 2$  della funzione inversa di  $f(x) = \ln(x) + 2x$ .

Svolgimento.  $f$  è derivabile con derivata strettamente positiva nel suo dominio  $D_f = (0, +\infty)$ . Inoltre, poichè  $f$  è strettamente crescente in  $D_f$ , esiste la sua funzione inversa che, per il Teorema 3.2.3, risulta derivabile in  $D_{f^{-1}} = \text{Im}_f$ . Dallo stesso teorema, se 2 appartiene all'immagine di  $f$ , si ha

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1/x_0 + 2},$$

dove  $x_0 = f^{-1}(2)$ . Occorre quindi trovare  $x_0$ , cioè risolvere l'equazione  $f(x) = 2$ . In generale un'equazione del tipo  $f(x) = y_0$  si risolve con metodi numerici, ma nel nostro caso si vede subito che  $x_0 = 1$  è soluzione (quindi unica soluzione: perché?) dell'equazione  $\ln(x) + 2x = 2$ . Pertanto

$$(f^{-1})'(2) = 1/3.$$

8. Data la funzione definita da  $f(x) = \sqrt{\frac{x + \sin(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}}}$ , determinare dominio e insieme in cui è continua. Inoltre stabilire per quali punti è applicabile la regola della catena e determinare la funzione derivata.

9. Dimostrazione del Teorema 3.2.1.

(Somma) Fissato  $x_0 \in D(f + g)$ , per ipotesi si ha

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad e \quad g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0),$$

con  $\varphi$  e  $\psi$  continue in  $x_0$ . Quindi... (esercizio)

(Prodotto) Fissato  $x_0 \in D(fg)$ , per ipotesi si ha

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad e \quad g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0),$$

con  $\varphi$  e  $\psi$  continue in  $x_0$ . Quindi

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \left( \varphi(x)g(x_0) + f(x_0)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0) \right)(x - x_0).$$

Pertanto  $(fg)(x) - (fg)(x_0) = \alpha(x)(x - x_0)$ , dove la funzione

$$\alpha(x) = \varphi(x)g(x_0) + f(x_0)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0)$$

è continua in  $x_0$  (essendo espressa tramite somma e prodotto di funzioni continue in  $x_0$ ). Questo prova che  $fg$  è derivabile in  $x_0$  e

$$(fg)'(x_0) = \alpha(x_0) = \varphi(x_0)g(x_0) + f(x_0)\psi(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(Quoziente) Fissato un punto  $x_0$  nel dominio di  $1/g$ , è sufficiente provare che se  $g$  è derivabile in  $x_0$ , allora lo è anche  $1/g$  e

$$(1/g)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

La derivata del rapporto  $f/g$  si ottiene applicando la regola precedente al prodotto di  $f$  con  $1/g$ . Per ipotesi si ha  $g(x) - g(x_0) = \psi(x)(x - x_0)$ , con  $\psi$  continua in  $x_0$ . Quindi

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0) = \alpha(x)(x - x_0),$$

Poiché la funzione

$$\alpha(x) = -\frac{\psi(x)}{g(x)g(x_0)}$$

risulta continua in  $x_0$  (essendo quoziente di funzioni continue),  $1/g$  è derivabile in  $x_0$  e la sua derivata è

$$(1/g)'(x_0) = \alpha(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(Composizione) Fissiamo un punto  $x_0$  nel dominio di  $g \circ f$  e supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $x_0$  e che  $g$  sia derivabile in  $y_0 = f(x_0)$ . Per ipotesi si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), & \forall x \in D(f), \\ g(y) &= g(y_0) + \psi(y)(y - y_0), & \forall y \in D(g), \end{aligned}$$

dove  $\varphi: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni continue nei punti  $x_0$  e  $y_0$ , rispettivamente. Osserviamo ora che se  $x$  appartiene al dominio di  $g \circ f$ , il numero  $f(x)$  sta necessariamente nel dominio  $D_g$  di  $g$  (in base alla definizione di dominio di una composizione). Quindi, la seconda uguaglianza, dato che è valida per ogni numero  $y$  in  $D(g)$ , resterà valida anche sostituendo  $f(x)$  al posto di  $y$ . Dunque, tenendo conto che  $f(x_0) = y_0$ , si ottiene per ogni  $x \in D_{g \circ f}$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = [\psi(f(x))\varphi(x)](x - x_0).$$

Questo prova che  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$ , visto che  $\psi(f(x))\varphi(x)$  è continua in  $x_0$  essendo composizione e prodotto di funzioni continue (infatti  $f$  e  $\varphi$  sono continue in  $x_0$  e  $\psi$  in  $y_0 = f(x_0)$ ). Pertanto

$$(g \circ f)'(x_0) = \psi(f(x_0))\varphi(x_0) = \psi(y_0)\varphi(x_0) = g'(y_0)f'(x_0),$$

e la tesi è dimostrata.  $\square$



## Capitolo 4

# Proprietà delle funzioni continue definite su intervalli

In questo capitolo diamo i teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Se non specificato diversamente le funzioni si considerano definite su intervalli, la teoria sarà poi applicata alle funzioni definite su unioni disgiunte di intervalli.

### 4.1 Periodo 24/10-2/11/2011. Par. 6.3 - 6.5.

#### 4.1.1 Mercoledì 26/10/11

Lezione non tenuta per indisponibilità dell'aula. Le ore di lezione saranno recuperate mercoledì 2 e mercoledì 9 novembre ore 8:15 - 9.

#### 4.1.2 Giovedì 27/10/11

25 - 26.

**Teorema 4.1.1** (della permanenza del segno per funzioni continue). *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua in un punto  $x_0 \in A$ . Se  $f(x_0) \neq 0$ , allora esiste un intorno  $I(x_0, \delta)$  di  $x_0$  tale che per tutti i punti  $x$  di tale intorno (e appartenenti al dominio di  $f$ ) il numero  $f(x)$  ha lo stesso segno di  $f(x_0)$ , cioè  $f(x)f(x_0) > 0$  per ogni  $x \in I(x_0, \delta) \cap A$ .*

*Dimostrazione.* Senza perdere in generalità si può supporre  $f(x_0) > 0$  (in caso contrario basta considerare la funzione  $g(x) = -f(x)$ ). Fissiamo  $\epsilon = f(x_0)$ . Per l'ipotesi di continuità esiste un intorno  $I(x_0, \delta)$  tale che

$$x \in I(x_0, \delta) \cap A \implies f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

Quindi, in particolare, dato che  $\epsilon = f(x_0)$ , se  $x \in I(x_0, \delta) \cap A$  si ha  $f(x) > 0$ .  $\square$

**Teorema 4.1.2** (di esistenza degli zeri). *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che  $f(a)f(b) < 0$ . Allora l'equazione  $f(x) = 0$  ammette almeno una soluzione in  $[a, b]$ .*

*Dimostrazione* (facoltativa). Si può supporre  $f(a) < 0$  (e, di conseguenza,  $f(b) > 0$ ), altrimenti basta sostituire  $f$  con  $-f$ .

Definiamo l'insieme  $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$  e consideriamo il numero  $c = \sup X$ . Chiaramente  $c \in [a, b]$ , dato che  $a \in X$  e  $b$  è un maggiorante per  $X$ . Mostriamo che il numero  $f(c)$  non può essere né minore di zero né maggiore di zero e, pertanto, non può che essere zero.

Se fosse  $f(c) < 0$ , si avrebbe  $c \neq b$  (avendo supposto  $f(b) > 0$ ) e quindi  $c < b$ . Allora, per il teorema della permanenza del segno (per funzioni continue), esisterebbe un

intervallo  $(c, c + \delta)$  contenuto in  $[a, b]$  in cui  $f$  risulterebbe negativa. Pertanto, a destra di  $c$  ci sarebbero dei punti di  $X$ , contraddicendo il fatto che  $c$  è un maggiorante per  $X$ . Quindi il numero  $f(c)$  non può essere minore di zero.

Se fosse  $f(c) > 0$ , si avrebbe  $c \neq a$  (dato che  $f(a) < 0$ ) e quindi  $c > a$ . Esisterebbe allora un sottointervallo  $(c - \delta, c)$  di  $[a, b]$  in cui  $f$  risulterebbe positiva. Pertanto, essendo  $c$  un maggiorante per  $X$ , e non essendoci elementi di  $X$  tra  $c - \delta$  e  $c$ , sarebbe un maggiorante anche  $c - \delta$ , contraddicendo il fatto che  $c$  è il più piccolo maggiorante per  $X$ . Di conseguenza  $f(c)$  non può essere maggiore di zero.  $\square$

**Esempio.** L'equazione  $\operatorname{sgn}(x) - 1/2 = 0$  non ha soluzioni (dato che  $\operatorname{sgn}(x)$  assume soltanto valori interi), eppure agli estremi dell'intervallo  $[-1, 1]$  la funzione definita da  $f(x) = \operatorname{sgn}(x) - 1/2$  ha segno discorde (spiegare l'apparente contraddizione).

**Lemma 4.1.1.** *Sia  $f$  una funzione continua in un intervallo  $J$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *Se  $f$  non si annulla in  $J$  allora non cambia segno in  $J$ .*
2. *Se  $f$  cambia segno in  $J$  allora  $f$  si annulla in  $J$ .*

*Inoltre le precedenti proposizioni sono equivalenti al Teorema degli zeri.*

*Dimostrazione.* Per esercizio.

Come conseguenza otteniamo che, se conosciamo tutti gli zeri di una funzione continua su un intervallo, possiamo determinarne il segno testandolo in ciascun intervallo determinato da due zeri successivi.

**Esempio.** Determinare il segno della funzione  $f$  definita da

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 + 3x - 10}.$$

Poichè  $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$  e  $Q(x) = (x - 2)(x + 5)$ , la funzione è continua su  $(-\infty, -5)$ ,  $(-5, 2)$  e  $(2, +\infty)$  e non cambia segno nei seguenti intervalli

$$(-\infty, -5), \quad (-5, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 3), \quad (3, +\infty).$$

Inoltre  $P(x)$  cambia segno solo in  $x_0 = 3$  e  $Q(x)$  cambia segno in  $x_0 = -5$  e in  $x_0 = 2$ .

Poichè  $f(0) > 0$  otteniamo che  $f$  è positiva in  $(-5, 1)$ , ma anche in  $(1, 2)$  (perchè numeratore e denominatore non cambiano segno in  $x_0 = 1$ ), negativa in  $(-\infty, -5)$  e in  $(2, 3)$  ed infine positiva in  $(3, +\infty)$ .

**Teorema 4.1.3** (dei valori intermedi). *L'immagine continua di un intervallo è un intervallo, cioè: se  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua in un intervallo, allora l'immagine  $f(J)$  di  $f$  è un intervallo. Equivalentemente si può affermare che  $(\inf f, \sup f) \subseteq f(J)$ .*

*Dimostrazione* (facoltativa). Se  $(\inf f, \sup f) = \emptyset$ , la funzione è costante ed il risultato è provato. Altrimenti sia  $\bar{y} \in (\inf f, \sup f)$ . Per definizione di estremo inferiore e superiore esistono due punti  $y_1 = f(a)$  e  $y_2 = f(b)$  di  $f(J)$  tali che  $y_1 < \bar{y} < y_2$ .

Applicando il teorema degli zeri alla funzione  $g : x \mapsto f(x) - \bar{y}$  nell'intervallo  $[a, b]$  se  $a < b$ , o  $[b, a]$  se  $b < a$ , otteniamo l'asserto.  $\square$

**Osservazione.** Il precedente Teorema dei valori intermedi si dimostra usando il Teorema degli zeri che a sua volta è un suo corollario. Infatti dal Teorema 4.1.3 segue che se  $f$  assume valori sia positivi sia negativi, esiste almeno un punto del dominio in cui si annulla. Si può quindi affermare che i due teoremi sono equivalenti.

**Corollario 4.1.1.** Sia  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in un intervallo  $J \subseteq \mathbb{R}$ . Allora sono possibili i seguenti casi, in dipendenza dell'esistenza di massimo e minimo

$$\begin{aligned} \text{esistono } m = \min f \text{ e } M = \max f &\Leftrightarrow f(J) = [m, M] \\ \text{esiste } m = \min f \text{ e non esiste } \max f &\Leftrightarrow f(J) = [m, \sup f) \\ \text{non esiste } \min f \text{ ed esiste } M = \max f &\Leftrightarrow f(J) = (\inf f, M] \\ \text{non esistono nè } \min f \text{ nè } \max f &\Leftrightarrow f(J) = (\inf f, \sup f) \end{aligned}$$

**Esempio.** La funzione  $f(x) = 1/x$ , sebbene sia continua, non ha per immagine un intervallo (perché?).

**Riguardare le proprietà dei polinomi.** Più precisamente il concetto di radice e sua molteplicità, la divisione con resto fra polinomi e il Teorema di Ruffini cioè: *il resto della divisione di un polinomio  $P(x)$  di grado  $\geq 1$  per  $x - x_0$  è il valore  $P(x_0)$* . Si ricordi che la regola di Ruffini è un algoritmo per calcolare quoziente e resto della divisione  $P(x) : (x - x_0)$ .

**Teorema 4.1.4** (di Weierstrass, senza dimostrazione). *Se una funzione è continua in un intervallo limitato e chiuso, allora ammette minimo e massimo.*

**ATTENZIONE:** per noi il massimo (minimo) è il più grande (piccolo) dei valori assunti. In alcuni testi si usa anche la notazione massimo (minimo) assoluto o globale, per contrapporlo al massimo (minimo) locale che sarà definito in seguito.

**Corollario 4.1.2.** *L'immagine continua di un intervallo limitato e chiuso è un intervallo limitato e chiuso.*

**Esercizio da fare.** Provare che se una funzione è continua sull'unione di due (tre, quattro, un numero finito) di intervalli limitati e chiusi, allora ammette massimo e minimo.

**Osservazione.** Le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono tre: continuità della funzione; il dominio è un intervallo limitato; il dominio è un intervallo chiuso. Mostriamo con degli esempi che nessuna delle tre ipotesi può essere rimossa (ferme restando le altre due) senza pregiudicare l'esistenza del minimo o del massimo.

1. La funzione  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$  non ammette massimo nè minimo (provarlo per esercizio determinandone l'immagine sia disegnando il grafico che usando la definizione). Quale ipotesi del Teorema di Weierstrass non è soddisfatta?
2. La funzione  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x$  non ammette massimo (provarlo per esercizio). Quale ipotesi del Teorema di Weierstrass non è soddisfatta?
3. La funzione  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x$  non ammette massimo (provarlo per esercizio). Quale ipotesi del Teorema di Weierstrass non è soddisfatta?

Inoltre le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono sufficienti ma non necessarie per l'esistenza di massimo e minimo. Per dimostrare questa affermazione, trovare un esempio di funzione che, pur non soddisfacendo una (o due, o anche tre) delle ipotesi del Teorema di Weierstrass, ammetta massimo e minimo.

### 4.1.3 Mercoledì 2/11/11

**27-29.** Complementi sulle funzioni continue: algoritmo per la soluzione approssimata di una equazione, derivante dal teorema degli zeri (metodo di bisezione).

**Esercizi 4.1.1.** 1. Dedurre dal teorema dei valori intermedi che la funzione segno non è continua.

2. Provare, usando il teorema dei valori intermedi, che l'immagine del polinomio  $P : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$  è tutto  $\mathbb{R}$ .

3. Convincersi (ed eventualmente cercare di provare) che l'immagine di un polinomio di grado dispari è  $\mathbb{R}$ .

4. Provare, usando il teorema dei valori intermedi, che l'immagine del polinomio  $Q : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2$  è una semiretta positiva.

5. Convincersi (ed eventualmente cercare di provare) che l'immagine di un polinomio di grado pari è una semiretta chiusa (serve anche il teorema di Weierstrass).

6. Determinare dominio, continuità, segno e funzione derivata delle funzioni definite da

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}, \sqrt{x-1}, \frac{3}{x^2} + 1, \sqrt{x^2 + 2x - 1}, |x^2 - 4x - 5|, \sqrt{-x}.$$

Inoltre di ciascuna funzione si calcoli, mediante la definizione, l'immagine e si determini l'esistenza di massimo (minimo), punti di massimo (minimo) e funzione inversa. Di quali delle precedenti funzioni si può dire a priori che l'immagine è un intervallo?

7. Usando il teorema degli zeri determinare il segno della funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 3}{x + 5}$$

8. Usando la continuità, disegnare un grafico qualitativo della funzione  $x \mapsto \sin(1/x)$ . Suggerimento. Si calcoli l'immagine, i punti di massimo e minimo, gli zeri e si osservi che la funzione è dispari, che è positiva per  $x > 1/\pi$  (perché?) e che è decrescente su  $[2/\pi, +\infty)$ .

9. Si provi che la funzione  $x \mapsto x \sin(1/x)$  è estendibile per continuità a  $x_0 = 0$ , ma non è ivi derivabile. Si disegni un grafico qualitativo della funzione estesa (per quanto possibile). Si usi il suggerimento del precedente esercizio e il fatto che il suo grafico è contenuto nella regione  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\}$ .

10. Usando la continuità, disegnare un grafico qualitativo della funzione  $x \mapsto \sin(x)/x$ , estesa per continuità a 0. Suggerimento. Si calcolino gli zeri e il segno, si osservi che la funzione è pari e che il suo grafico è delimitato dai grafici  $y = \pm 1/x$ .

11. Disegnare il grafico e determinare la continuità al variare di  $k \in \mathbb{R}$  delle funzioni

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1) + k & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) + k & \text{se } x > 0 \\ x^2 + k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Se ne determini inoltre, graficamente, immagine estremo superiore ed inferiore e, se esistono, massimo e minimo.

12. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni e determinare graficamente immagine e estremo superiore e inferiore

$$x \mapsto \ln(|x|), \quad x \mapsto |\ln(|x|)|, \quad x \mapsto |\arctan(x)|, \quad x \mapsto \tan(|x|)$$

Delle precedenti funzioni determinare la funzione derivata specificando il dominio.

13. Considerare la funzione definita da  $f(x) := x + e^x$  e verificare, usando la teoria svolta, che è continua. Giustificare inoltre le seguenti affermazioni

- (a) La funzione è strettamente crescente.
- (b) L'equazione  $x + e^x = 3$  ammette una soluzione unica.
- (c) L'immagine della funzione è tutto  $\mathbb{R}$ .
- (d) La funzione ha inversa continua con dominio e immagine uguali a  $\mathbb{R}$

14. Calcolare gli zeri e il segno delle funzioni:  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ ,  $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ . (Notare che  $x^3 - 2x^2 + x + 4 = x(x-1)^2 + 4$  e  $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$ ).

15. Delle seguenti funzioni studiare: dominio, immagine, massimo e minimo, zeri, segno, deivabilità

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right), \quad f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x^2 - 4x - 5} - 2\right).$$

16. Trovare il dominio di:  $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$ .

17. Calcolare zero e segni della funzione

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 6}{x^2 + 1}.$$

18. Calcolare zeri, min e max della funzione

$$f(x) = |x^3 - 3x^2 - 2x - 6|.$$

19. Calcolare per quali valori di  $k$  è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-k) & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}.$$

Determinare inoltre se esistono valori di  $k$  per cui la funzione è derivabile.

20. **Esercizio da fare.** Provare il seguente Corollario del Teorema 3.2.3 sulla derivata della funzione inversa. Sia  $f \in C^1(J)$  una funzione invertibile con derivata non nulla nell'intervallo  $J$  (quindi ha segno costante, perchè?). Allora  $f^{-1} \in C^1(f(J))$  e si ha per ogni punto  $x \in f(J)$ ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Suggerimento. Si tratta di saper leggere la formula del teorema.



## Capitolo 5

# Calcolo differenziale delle funzioni reali di una variabile reale

In questo capitolo si trattano le proprietà principali delle funzioni derivabili. Tutte le funzioni (se non esplicitamente detto) saranno definite su intervalli e  $J$  rappresenterà un intervallo. Lo studente è tenuto ad estendere la teoria alle funzioni definite da unioni di intervalli.

### 5.1 Periodo 3-11/11/11. Par. 7.1,7.2

#### 5.1.1 Giovedì 3/11/11

**30-31.** Sia  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $x_0$ , ponendo  $x = x_0 + h$  nella definizione di funzione derivabile in  $x_0$ , otteniamo

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(x_0 + h)h = (f'(x_0) + \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0))h,$$

dove la funzione  $h \mapsto (\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0))$  è una funzione continua e nulla nel punto  $h = 0$ . Chiameremo funzioni con tali proprietà funzioni infinitesime in 0, più precisamente:

**Definizione 5.1.1.** *Chiameremo funzione infinitesima in 0, una qualunque funzione che sia continua e nulla in  $x = 0$ . Indicheremo tale funzione col simbolo  $\epsilon(x)$ . Ovviamente, la variabile di detta funzione potrà essere indicata con una qualunque lettera, ad esempio  $\epsilon(x - x_0)$  indicherà una qualunque funzione continua e nulla nel punto  $x = x_0$ , la diremo infinitesima in  $x_0$  e scriveremo:*

$$f(x) = \epsilon(x - x_0).$$

*Osservazioni*

1. Come abbiamo visto, mediante la definizione di limite, il concetto di funzione infinitesima in  $x_0$  può essere espresso dicendo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \tag{5.1}$$

inoltre, se la proprietà (5.1) è vera,  $f$  (anche se non è definita in  $x_0$ ) può essere estesa per continuità ad  $x_0$  col valore  $f(x_0) = 0$ . Una funzione con la proprietà (5.1) è detta infinitesima (o anche un infinitesimo) per  $x \rightarrow x_0$  e si usa il simbolo detto di Landau (vedi par. 5.3 del testo di riferimento).

$$f(x) = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Per quanto detto possiamo quindi affermare che

$$f(x) = \epsilon(x - x_0) \Leftrightarrow f(x) = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

2. Si noti che  $\epsilon(x)$  (così come  $o(1)$ ) non è una funzione, ma una proprietà. Infatti diremo che la funzione seno e la funzione identità sono infinitesime in 0 e scriveremo  $\sin(x) = \epsilon(x)$  e  $x = \epsilon(x)$ , ma **non possiamo certo dedurre**  $x = \sin(x)$ .

**Lemma 5.1.1.** *Per il calcolo con funzioni infinitesime valgono le seguenti regole (dimostrarle per esercizio):*

1.  $f$  è continua in un punto  $x = x_0$  se e solo se  $f(x_0 + h) = f(x_0) + \epsilon(h)$  o, equivalentemente,  $f(x) = f(x_0) + \epsilon(x - x_0)$ ;
2. la somma (o la differenza) di due funzioni  $\epsilon(x)$  è una funzione  $\epsilon(x)$  (in formule  $\epsilon(x) \pm \epsilon(x) = \epsilon(x)$ );
3. il prodotto di una funzione  $f$  continua (nel punto  $x = 0$ ) per una funzione  $\epsilon(x)$  è una funzione  $\epsilon(x)$  (in formule  $\epsilon(x)f(x) = \epsilon(x)$ );
4. se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono funzioni  $\epsilon(x)$ , allora la composizione  $g \circ f(x)$  è una funzione  $\epsilon(x)$  (in formule  $\epsilon \circ \epsilon(x) = \epsilon(x)$ ).

Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in un punto  $x_0 \in J$ . Per la definizione di funzione derivabile, sappiamo che esiste  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $x_0$  e tale che

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall x \in J.$$

Denotando con  $h$  l'incremento  $x - x_0$  della variabile indipendente (equivalentemente usando il cambiamento di variabile  $x = x_0 + h$ ) si ha l'uguaglianza

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi(x_0 + h)h,$$

valida per ogni numero  $h$  ammissibile, cioè tale che  $x_0 + h \in J$ .

Notiamo che  $\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \epsilon(h)$ , dove la funzione  $\epsilon(h) := \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$  è continua e nulla per  $h = 0$ . Quindi, tenendo conto che  $\varphi(x_0) = f'(x_0)$  si ottiene l'uguaglianza

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \epsilon(h)h,$$

valida per ogni  $h$  ammissibile. Se ritorniamo alla variabile di partenza, possiamo anche scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)(x - x_0).$$

Tale uguaglianza si chiama *formula di Taylor del primo ordine di  $f$  in  $x_0$*  (col resto nella forma di Peano). Ritorniamo in seguito sulla formula di Taylor, adesso vogliamo considerare il significato di tale formula in termini di approssimazione.

Consideriamo quindi la funzione *approssimante*

$$P_1: x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{col solito cambio di variabile } h \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Tale funzione, che è un polinomio di primo grado, si dice *approssimazione del primo ordine di  $f$  in  $x_0$* . Il nome deriva dal fatto che  $P_1$  è il polinomio di primo grado che meglio approssima la funzione "vicino" ad  $x_0$ , cioè scegliendo  $P_1$  invece di  $f$ , il rapporto fra l'errore che si commette e l'incremento della variabile può essere reso arbitrariamente piccolo purchè l'incremento della variabile sia scelto sufficientemente piccolo. Inoltre  $P_1$  è l'unico polinomio di primo grado con questa proprietà. Più precisamente, denotato l'errore con

$$E_1: x \mapsto f(x) - P_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)],$$

la formula di Taylor ci dice che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intorno  $I(x_0, \delta)$  tale che:

$$|E(x)| < |x - x_0|\varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I(x_0, \delta) \cap J.$$

**Definizione 5.1.2.** Il grafico della approssimazione del primo ordine (che è una retta del piano) si dice retta tangente al grafico di  $f$  nel punto corrispondente a  $x_0$ . Quindi è la retta di equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Esercizio.** Interpretazione geometrica della retta tangente come “limite” delle rette secanti passanti per  $P_0 = (x_0, f(x_0))$

**Esercizi.** Calcolo di rette tangenti. Uso dell'approssimazione del primo ordine per stabilire la derivabilità delle funzioni

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1) - \pi/4 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 + h & x \geq 1 \\ x^3 - kx + 3 & x < 1 \end{cases}$$

**Definizione 5.1.3.** Dato un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  e assegnato un numero  $\delta > 0$ , l'intorno sinistro (risp. l'intorno destro) di  $x_0$  di ampiezza (o raggio)  $\delta$  è l'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0]$  (risp.  $[x_0, x_0 + \delta)$ ) costituito dai punti  $x \leq x_0$  (risp.  $x \geq x_0$ ) che distano da  $x_0$  meno di  $\delta$ .

**Definizione 5.1.4.** Data una funzione  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  e dato un punto  $x_0 \in J$  che non sia l'estremo inferiore (sinistro) per  $J$ , la derivata (laterale) sinistra di  $f$  in  $x_0$  è (quando esiste) la derivata in  $x_0$  della restrizione di  $f$  all'insieme  $(-\infty, x_0] \cap J$ . Tale derivata si denota con  $D_-f(x_0)$  o con  $f'_-(x_0)$ . In modo analogo (purché  $x_0$ , oltre che appartenere ad  $J$  non sia l'estremo destro di  $J$ ) si definisce la derivata (laterale) destra di  $f$  in  $x_0$ , denotata  $D_+f(x_0)$  o  $f'_+(x_0)$ .

**Lemma 5.1.2.**  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in un punto  $x_0$  interno ad  $J$  se e solo se esistono  $D_-f(x_0)$  e  $D_+f(x_0)$  e coincidono.

*Dimostrazione.* Per esercizio.

**Esercizio da fare.** Dare la definizione di derivata destra e sinistra in termini di limite.

**Osservazione** Si osservi che se due funzioni  $f$  e  $g$  coincidono in un intorno sinistro (risp. destro) di  $x_0$  ( $x_0$  incluso), allora hanno la stessa derivata sinistra (risp. destra) in  $x_0$  (ammesso che esista). Quindi, se  $g$  è addirittura derivabile in  $x_0$ , allora esiste la derivata sinistra di  $f$  in  $x_0$  e risulta  $D_-f(x_0) = g'(x_0)$ . Ad esempio, per  $f(x) = |x| - x|x|$  si ha  $D_-f(0) = -1$ , perché per  $x \leq 0$  la funzione  $f(x)$  coincide con la funzione derivabile  $g(x) = x^2 - x$  la cui derivata nel punto  $x_0 = 0$  è  $-1$ .

## 5.2 Settimana 7-11/11/11. Par. 7.6 - 7.8

### 5.2.1 Mercoledì' 9/11/11

32-34

**Definizione 5.2.1.** Il punto  $x_0$  si dice singolare per  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f$  è continua ma non derivabile in  $x_0$ .

**Definizione 5.2.2.** Un punto si dice angoloso per una funzione se in tal punto la funzione è derivabile sia a sinistra sia a destra ma le derivate laterali sono diverse. In particolare, una funzione in un punto angoloso non è derivabile (ma non è difficile provare che è necessariamente continua).

Intuitivamente, da un punto di vista grafico, è chiaro cosa significa punto a tangente verticale. La seguente definizione sarà ripresa dopo la definizione di limite.

**Definizione 5.2.3.** Un punto  $x_0$  si dice a tangente verticale per  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $f$  è continua in  $x_0$  e la funzione reciproca della funzione rapporto incrementale in  $x_0$  cioè

$$\frac{1}{r_{x_0}} : x \mapsto \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

è estendibile per continuità ad  $x_0$  col valore 0. Più precisamente:

se esiste un intorno  $I(x_0, \delta)$  in cui  $r_{x_0}$  non cambia segno allora  $x_0$  si dice flesso a tangente verticale;

se invece  $r_{x_0}$  ha segni diversi in intorni destri e sinistri di  $x_0$ , allora si dice cuspidale.

**Esempio.** Per la funzione  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 0$  è un punto di flesso a tangente verticale. Per la funzione  $x \mapsto \sqrt{|x|}$ ,  $x_0 = 0$  è una cuspidale.

**Osservazione.** Sul libro solo i flessi a tangente verticale sono chiamati punti a tangente verticale, mentre le cuspidi non sono chiamate a tangente verticale. Vedremo come questo può essere espresso in termini di limiti.

**Definizione 5.2.4.** Sia  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale. Un punto  $x_0 \in J$  si dice di minimo relativo (o locale) per  $f$  in  $J$  se esiste un intorno  $U = I(x_0, \delta)$  di  $x_0$  tale che  $f(x) \geq f(x_0)$  per ogni  $x \in U \cap J$ . In modo analogo si definisce il concetto di massimo relativo. Un punto di minimo o di massimo relativo per  $f$  (in  $J$ ) si dice estremante per  $f$  (in  $J$ ).

Si osservi che un punto di minimo per una funzione è anche di minimo relativo ma, in generale, non è vero il contrario. Tuttavia, un punto di minimo relativo è di minimo per la restrizione della funzione ad un opportuno intorno del punto.

**Esempi.** i. Il punto  $x_0 = 0$  è di minimo (e quindi anche relativo) per la funzione  $f(x) = 1 + |x|$ , visto che  $f(0) = 1$  e  $f(x) \geq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Il punto  $x = 0$  è di minimo relativo per la funzione  $f(x) = 1 + |x| - x^2$ .

*Dimostrazione.*  $f(x) = 1 + |x|(1 - |x|)$ , quindi se  $|x| < 1$ , allora  $1 - |x| \geq 0$  e  $f(x) \geq 1$ . Pertanto, "se la restringo ad un opportuno intorno di  $x = 0$ " ( in questo caso posso restringerla ad esempio a  $I(0, 1)$ ) la funzione ha un minimo per  $x = 0$ . Ovviamente  $x = 0$  non è di minimo per  $f$ , perché  $f(x)$  in alcuni punti (quali?) assume valori minori di  $f(0)$ .

**Attenzione.** I punti di massimo o di minimo relativo di una funzione (cioè i punti estremanti) stanno nel dominio, e non sul grafico. I minimi e i massimi relativi (o assoluti), cioè i valori assunti nei punti estremanti, detti *estremi della funzione*, appartengono all'immagine (e neppure quelli stanno sul grafico).

**Teorema di Fermat.** Sia  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in J$ . Supponiamo che:

- (1)  $x_0$  sia interno ad  $J$ ;
- (2)  $f$  sia derivabile in  $x_0$ ;
- (3)  $x_0$  sia un punto estremante per  $f$  in  $J$ .

Allora  $f'(x_0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $f'(x_0) \neq 0$ . Ad esempio supponiamo  $f'(x_0) > 0$ . Per l'ipotesi (2) la funzione definita da  $r(x) = \begin{cases} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0), & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$

è continua in  $x_0$ , quindi (per il teorema della permanenza del segno) esiste un intorno  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  di  $x_0$  (che per l'ipotesi (1) possiamo supporre contenuto in  $J$ ) in cui  $r(x) > 0$ . Quindi, in tale intorno,  $f(x) < f(x_0)$  per  $x < x_0$  e  $f(x) > f(x_0)$  per  $x > x_0$ . Ne segue che  $x_0$  non può essere né un punto di minimo né un punto di massimo, contraddicendo

l'ipotesi (3). Pertanto non può essere  $f'(x_0) > 0$ . In maniera analoga si prova che non può essere  $f'(x_0) < 0$ . Dunque  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

Il Teorema di Fermat si può enunciare anche nel modo.

**Lemma 5.2.1.** *Se in un punto interno al dominio di una funzione la derivata è diversa da zero, allora tale punto non è estremante.*

Dalla precedente formulazione del Teorema di Fermat segue facilmente il seguente:

**Corollario 5.2.1.** *I punti "candidati ad essere" estremanti per  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  vanno cercati tra le seguenti tre categorie (sono quelli che rimangono dopo aver scartato i punti interni a  $J$  con derivata non nulla):*

- punti di  $J$  non interni (cioè gli estremi di  $J$ , se gli appartengono);
- punti di  $J$  in cui la funzione non è derivabile;
- punti interni a  $J$  in cui si annulla la derivata.

Nessuna delle tre condizioni del Corollario 5.2.1 ci assicura che un punto sia estremante. Tuttavia, se lo è, almeno una delle tre deve necessariamente essere soddisfatta.

**Esempio molto importante.** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Il teorema di Weierstrass ci assicura che ha massimo e minimo. Per calcolarli, posso usare il teorema di Fermat per determinare i candidati estremanti, cioè i punti di massimo e minimo sono da ricercare fra i punti del seguente insieme

$$X = \{a, b\} \cup \{x \in (a, b) : \nexists f'(x)\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$$

Se  $X$  contiene un numero finito di punti,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , il massimo e il minimo di  $f$  saranno, rispettivamente, il più grande e il più piccolo fra i valori di:

$$f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

**Esercizi 5.2.1.** 1. *Stabilire quali delle funzioni definite da:*

$$f(x) = x - \cos(x), \quad 1 - \cos(x), \quad x/(1+x), \quad |x|e^x, \quad e^x, \quad \cos(x) - e^x, \quad x^2 - \ln(\cos(x)).$$

sono del tipo  $\epsilon(x)$ .

2. *Stabilire quali delle funzioni definite da:*

$$x^2, \quad x - \cos(x), \quad x^3 \cos(x), \quad x \sin(x) + x^2, \quad x/(1+x), \quad |x|e^x, \quad x^2e^x, \quad |x|xe^x.$$

possono essere scritte nella forma  $\epsilon(x)x$ .

3. *Data la funzione definita da  $f(x) = 2x - x^3$ , determinare la retta tangente al grafico di  $f$  nei punti corrispondenti a  $x_0 = 0, -1, 1$ .*

4. *Studiare le seguenti funzioni in base alla teoria fin qui svolta*

$$x \mapsto \sin(1/x), \quad x \sin(1/x), \quad x^2 \sin(1/x),$$

5. *Determinare dominio e funzione derivata delle funzioni  $x \mapsto x^x, (1-x^2)^{\sin(x)}$ ,*

6. *La funzione abs ha due punti di massimo e uno di minimo nell'intervallo  $[-1, 1]$ . Quali sono i suoi punti di massimo e minimo sull'intervallo  $[-1, 3]$ ?*

7. *Determinare massimo e minimo della funzione  $x \mapsto x^2 - 2x - 3$  su  $J$  con  $J = [-4, 4], [0, 7], [-4, -2], [2, 5]$ . È particolarmente istruttivo risolvere il problema sia con il teorema di Fermat che disegnando il grafico.*

8. Disegnare il grafico e determinare graficamente massimo e minimo della funzione  $x \mapsto ||x^3 + 1| - 3|$  su  $J$  con  $J = [-2, 2]$ ,  $[0, 7]$ ,  $[-1/2, 2]$ . Riconoscere a quali delle categorie del Corollario 5.2.1 appartengono i punti di massimo e minimo. Risolvere il problema usando il teorema di Fermat (prescindendo dal grafico disegnato), usando il teorema di derivazione per le funzioni composte e stabilendo quali siano i punti singolari mediante la definizione di derivata.

9. Determinare al variare di  $k \in \mathbb{R}$  massimo e minimo (se esistono) della funzione  $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ 1/(x+3) + k, & x > 0 \end{cases}$ . Ci sono ulteriori massimi e minimi relativi?

## 5.2.2 Giovedì 10/11/11.

### 35-36.

**Teorema 5.2.1** (Teorema di Rolle). Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione soddisfacente le seguenti ipotesi:

- (1)  $f$  è continua in  $[a, b]$ ;
- (2)  $f$  è derivabile in  $(a, b)$ ;
- (3)  $f(a) = f(b)$ .

Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $f$  è continua in un intervallo limitato e chiuso, per il Teorema di Weierstrass ammette minimo e massimo. Esistono cioè (almeno) due punti  $c_1$  e  $c_2$  in  $[a, b]$  per i quali risulta  $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Se uno dei due punti, ad esempio  $c = c_1$ , è interno all'intervallo  $[a, b]$ , allora, essendo  $f$  derivabile in tal punto, dal Teorema di Fermat segue  $f'(c) = 0$  (e la tesi, in questo caso, è dimostrata). Se, invece, nessuno dei due punti è interno ad  $[a, b]$ , allora sono entrambi negli estremi di  $[a, b]$ , e quindi, per l'ipotesi (3) si ha  $f(c_1) = f(c_2)$ . Pertanto, essendo  $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ , la funzione risulta costante e, di conseguenza, la derivata è nulla in ogni punto  $c \in (a, b)$ .  $\square$

I seguenti esempi mostrano che nessuna delle tre ipotesi del Teorema di Rolle può essere rimossa, ferme restando le altre due.

**Esempio.** La funzione  $f(x) = |x|$  è continua in  $[-1, 1]$  e  $f(-1) = f(1)$ , ma la sua derivata non si annulla mai in  $(-1, 1)$ . Perché non si può applicare il Teorema di Rolle?

**Esempio.** La funzione  $f(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$  è definita in  $[0, 1]$ , è derivabile in  $(0, 1)$  e  $f(0) = f(1)$ . Tuttavia la sua derivata non si annulla mai in  $(0, 1)$ . Perché non si può applicare il Teorema di Rolle?

**Esempio.** La funzione  $f(x) = x$  è derivabile in  $[0, 1]$  (quindi anche continua), ma la sua derivata non si annulla mai in  $(0, 1)$ . Perché non si può applicare il Teorema di Rolle?

Il seguente risultato è un'importante estensione del Teorema di Rolle, nonché una sua facile conseguenza.

**Teorema 5.2.2** (Teorema di Lagrange o del valor medio). Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione soddisfacente le seguenti ipotesi:

- (1)  $f$  è continua in  $[a, b]$ ;
- (2)  $f$  è derivabile in  $(a, b)$ .

Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Dimostrazione.* Definiamo una nuova funzione

$$\varphi(x) := f(x) - kx,$$

determinando la costante  $k$  in modo che  $\varphi$  soddisfi (in  $[a, b]$ ) le ipotesi del Teorema di Rolle. Le prime due sono ovviamente verificate qualunque sia la costante  $k$ . È facile mostrare che l'unica costante che rende  $\varphi(a) = \varphi(b)$  è

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Per il Teorema di Rolle esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $\varphi'(c) = 0$ , e la tesi segue immediatamente osservando che  $\varphi'(x) = f'(x) - k$ .  $\square$

### Esercizi da fare.

1. Dati due arbitrari punti  $a, b \in \mathbb{R}$ , l'intervallo che ha per estremi tali punti si chiama *segmento di estremi  $a$  e  $b$*  e si denota con  $\overline{ab}$ . In altre parole:  $\overline{ab} = [a, b]$  se  $a < b$ ,  $\overline{ab} = \{a\}$  se  $a = b$  e  $\overline{ab} = [b, a]$  se  $a > b$ .  
Dedurre dal Teorema di Lagrange che se  $f$  è derivabile in un intervallo  $J$ , allora, dati  $x_1, x_2 \in J$ , esiste un punto  $c \in \overline{x_1 x_2}$  tale che  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ .
2. Dare l'interpretazione geometrica dei teoremi di Rolle e Lagrange, cioè esprimerli in termini di retta tangente al grafico.

Diamo ora alcune importanti conseguenze del Teorema di Lagrange. In particolare faremo vedere che il segno della funzione derivata comporta importanti proprietà di crescita per la funzione.

**Corollario 5.2.2.** *Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in un intervallo  $J$*

1. *Se  $f'(x) \geq 0$  (risp.  $f'(x) \leq 0$ ) per ogni  $x \in J$ , allora  $f$  è crescente (risp. decrescente) in  $J$ .*
2. *Se  $f'(x) > 0$  (risp.  $f'(x) < 0$ ) per ogni  $x \in J$ , allora  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) in  $J$ .*
3. *Se  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in J$ , allora  $f$  è costante in  $J$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto 1: siano  $x_1, x_2 \in J$  tali che  $x_1 < x_2$ . Per il Teorema di Lagrange esiste un punto  $c \in (x_1, x_2)$  per cui  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . Poiché  $f'(c) \geq 0$ , si ha  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Gli altri punti si dimostrano in maniera analoga, dimostrarli per esercizio.  $\square$

**Osservazione.** Nel precedente corollario, l'ipotesi che  $f$  sia definita in un intervallo non può essere rimossa. Ad esempio, per quanto riguarda il punto 3, si osservi che la funzione  $f(x) = |x|/x$  è derivabile nel suo dominio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ha derivata nulla, ma non è costante (lo è in ogni sottointervallo del dominio).

- Esempi.** (a) Applicare le condizioni di crescita per determinare i punti estremanti e l'immagine della funzione  $f: [-2, 1] \mapsto |x^3 + 1|$ .  
 (b) Rispondere alla seguente domanda: *per quali valori del parametro  $\lambda$  l'equazione  $|x^3 + 1| + 2\lambda = 0$  ammette almeno una soluzione nell'intervallo  $[-2, 1]$ ?*  
 (c) Lo studente risolva anche graficamente i precedenti problemi e confronti i risultati

ottenuti graficamente con quelli ottenuti per via analitica.

*Svolgimento.* (a) Innanzitutto osserviamo che  $f$  è continua in un intervallo compatto (cioè limitato e chiuso). Pertanto, per il Teorema di Weierstrass, ammette minimo e massimo assoluti. Inoltre, essendo definita in un intervallo, per il teorema dei valori intermedi, la sua immagine è un intervallo (necessariamente limitato e chiuso, dato che  $f$  ammette minimo e massimo). Per trovare i punti estremanti (relativi e assoluti) conviene suddividere il dominio di  $f$  in intervalli in cui risulta monotona. Studiamo perciò il segno della sua derivata. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 1 & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ x^3 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

risulta

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 3x^2 & \text{se } -1 < x \leq 1. \end{cases}$$

Quindi  $f(x)$  è decrescente nell'intervallo  $[-2, -1]$  ed è crescente in  $[-1, 1]$ . Da cui si deduce che  $x = -2$  e  $x = 1$  sono punti di massimo e  $x = -1$  è un punto di minimo. Calcolando i valori di  $f(x)$  in detti punti si può affermare che il valore massimo di  $f$  è 7 ed è assunto in  $x = -2$ , mentre il minimo vale 0 ed è assunto nel punto  $x = -1$ . In base al teorema dei valori intermedi si può concludere che l'immagine di  $f$  è l'intervallo  $[0, 7]$ .

(b) Si osservi che l'equazione  $|x^3 + 1| + 2\lambda = 0$  ammette almeno una soluzione in  $[-2, 1]$  se e solo se il numero  $-2\lambda$  appartiene all'insieme dei valori assunti dalla funzione  $|x^3 + 1|$  nell'intervallo  $[-2, 1]$ , cioè se e solo se  $-2\lambda$  sta nell'immagine della funzione  $f(x)$  definita nel precedente esercizio. Pertanto la suddetta equazione ammette una soluzione in  $[-2, 1]$  se e solo se  $0 \leq -2\lambda \leq 7$ , da cui si ricava (moltiplicando i tre membri della doppia disequazione per  $-1/2$ ) che  $0 \geq \lambda \geq -7/2$  (ovvero  $\lambda \in [-7/2, 0]$ ).

**Definizione 5.2.5.** La derivata della derivata di una funzione  $f$  si chiama derivata seconda di  $f$  e si indica con  $f''$ , con  $D^2f$  o con

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2f}{dx^2}.$$

In generale, la derivata della derivata  $(n-1)$ -esima di  $f$  si chiama derivata  $n$ -esima e si denota con  $f^{(n)}$ , con  $D^n f$  o con

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Abbiamo definito nel Capitolo 3 il significato di  $f \in C^0(A)$  e  $f \in C^1(A)$ , estendiamo ora la notazione.

**Definizione 5.2.6.** Una funzione  $f$  si dice (di classe)  $C^n$  in  $A \subset \mathbb{R}$  (o che appartiene alla classe  $C^n(A)$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , se ammette derivata  $n$ -sima continua in  $A$ . Si dice infine che  $f$  è (di classe)  $C^\infty$  in  $A$ , se è  $C^n$  in  $A$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per indicare che  $f$  è di classe  $C^n$  (risp.  $C^\infty$ ) in  $A$  si scrive:

$$f \in C^n(A) \text{ (risp. } f \in C^\infty(A)).$$

Abbiamo visto che le funzioni derivabili sono anche continue, pertanto, se  $f$  è  $C^1$ , essendo derivabile, è anche di classe  $C^0$ . Più in generale vale il seguente risultato:

$$C^\infty(A) \subset \dots \subset C^n(A) \subset C^{n-1}(A) \subset \dots \subset C^0(A)$$

**Esercizi 5.2.2.** 1. (Facoltativo). Sia  $f$  derivabile in un intervallo  $J$ . Provare che la condizione " $f'(x) \geq 0, \forall x \in J$ " non è soltanto sufficiente, ma anche necessaria affinché  $f$  sia crescente in  $J$ .

Suggerimento. Osservare che se  $f$  è crescente allora, fissato  $x_0 \in J$ , risulta

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x \in J, x \neq x_0,$$

e quindi non può essere  $f'(x_0) < 0$ , altrimenti, per il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue...

2. Sia  $f$  derivabile in un intervallo  $J$ . Mostrare, con un esempio, che la condizione " $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in J$ " non è necessaria affinché  $f$  sia strettamente crescente in  $J$  (è soltanto sufficiente).
3. Usare il punto 3 del Corollario 5.2.2 per mostrare che la funzione  $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$  è costante e determinare tale costante.
4. Determinare i punti estremanti delle seguenti funzioni e stabilire quali di essi sono di massimo o minimo (assoluto o relativo):  $x \mapsto xe^{-x}$ ,  $|x|e^{-x}$ ,  $|x| - x^2$ .
5. Studiare (per quanto possibile) i grafici delle funzioni

$$x \mapsto x^x, \quad e^{-x^2}, \quad 1 + |x| - x^2$$

6. Provare il seguente risultato. Sia  $f \in C^1([a, b])$ . Se  $f'(a) > 0$  (risp.  $f'(a) < 0$ ), allora  $a$  è un punto di minimo (risp. massimo) relativo. Analogamente, se  $f'(b) > 0$  (risp.  $f'(b) < 0$ ), allora  $b$  è un punto di massimo (risp. minimo) relativo.

Svolgimento. Da un punto di vista intuitivo, basta disegnare il grafico della retta tangente nei punti di ascissa  $a$  e  $b$ , ricordandosi che la retta tangente è il grafico di una funzione approssimante (lo studente volenteroso usi questa idea per dimostrare il risultato osservando che basta la derivabilità di  $f$  nei soli estremi dell'intervallo). Altrimenti basta applicare il teorema della permanenza del segno alla funzione  $f'$  e i corollari precedenti sulla crescita delle funzioni derivabili.  $\square$

Osserviamo che il risultato del precedente esercizio rappresenta (soltanto) una condizione sufficiente affinché un punto sia estremante, mentre il teorema di Fermat dà (soltanto) una condizione necessaria.

7. La funzione  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = x^2$ , mostra che la condizione " $f'(a) > 0$ " del precedente risultato non è necessaria affinché il punto  $a$  sia di minimo. Si invitano gli studenti a dedurre (dal suddetto risultato) che una condizione necessaria (nell'ipotesi che  $f$  sia derivabile nell'estremo  $a$  del dominio  $[a, b]$ ) è la seguente: " $f'(a) \geq 0$ ".
8. Delle seguenti funzioni stabilire per quali  $n \in \mathbb{N}$  sono di classe  $C^n$  e su quali insiemi.
  - (a) Polinomi, funzioni razionali, radici, potenze ad esponente reale ed eventuali loro estensioni per continuità a 0.
  - (b)  $\text{abs}$ ,  $\sin$ ,  $\arcsin$ ,  $\exp$ ,  $\ln$ , ...
  - (c) Tutte le funzioni considerate nei precedenti capitoli
  - (d)  $x \mapsto |x|x^3$ ,  $x^2 \sin(1/x)$

## 5.3 Settimana 14-18/11/11. Par. 7.9 - 7.11

### 5.3.1 Mercoledì 16/11/11.

37-38

**Definizione 5.3.1.** Una funzione reale definita in un intervallo  $J$  si dice convessa [concava] se la corda (cioè il segmento) che congiunge due punti qualunque del suo grafico sta sopra [sotto] il grafico.

**Teorema 5.3.1** (senza dimostrazione). 1. Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. Allora  $f$  è convessa [concava] se e solo se la retta tangente ad un punto qualunque del suo grafico sta sotto [sopra] il grafico.

2. Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. Allora  $f$  è convessa [concava] se e solo se la sua derivata è crescente [decrescente] in  $J$ .

3. Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte in  $J$ . Allora  $f$  è convessa [concava] se e solo se  $f''(x) \geq 0$  [ $f''(x) \leq 0$ ] per ogni  $x$  in  $J$ .

**Corollario 5.3.1** (condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di estremo globale). Sia  $f$  una funzione derivabile e convessa [concava] sull'intervallo  $J$ . Se esiste  $x_0 \in J$  tale che  $f'(x_0) = 0$ , allora  $x_0$  è un punto di minimo [massimo] globale per  $f$  su  $J$ .

*Dimostrazione.* Per esercizio: applicare il Teorema 5.3.1 punto 2.  $\square$

**Esempio.** La funzione  $x \mapsto x^4 + 3x^2 - x$  è convessa (si controlli la derivata seconda) e la derivata prima (polinomio di grado tre) si annulla, quindi ha un solo punto di minimo globale. Si osservi che la derivata prima può avere un solo zero.

**Definizione 5.3.2.** Un punto  $x_0$  interno al dominio di una funzione  $f$  si dice di flesso (per  $f$ ) se il grafico di  $f$  ammette la retta tangente nel punto di ascissa  $x_0$  e se in un suo semi-intorno la funzione è convessa e nell'altro semi-intorno è concava (ossia, se esistono un intorno destro e un intorno sinistro di  $x_0$  con concavità discordi: da una parte la funzione è convessa e dall'altra è concava).

In base al precedente Teorema 5.3.1, se una funzione è di classe  $C^2$ , una condizione che assicura che in un punto  $x_0$  del dominio si abbia un flesso è che la derivata seconda cambi segno in  $x_0$  (da una parte positiva e dall'altra negativa). In tal caso si ha necessariamente  $f''(x_0) = 0$  (perché?).

**Esempi.**

1. La funzione  $f(x) = x + x^3$  ha un flesso nel punto  $x_0 = 0$ , perché in tal punto (appartenente al dominio)  $f''(x)$  cambia segno.
2. La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ha un flesso in  $x_0 = 0$  (anche se non è derivabile in  $x_0 = 0$ ), perché ha una tangente verticale in  $x = 0$  ed è concava su  $(-\infty, 0]$  e convessa su  $[0, -\infty)$ .
3. La derivata seconda di  $f(x) = x + x^4$  si annulla nel punto  $x_0 = 0$ , ma  $f$  non ha un flesso in tal punto, perché la sua derivata seconda è positiva in un intorno forato di  $x_0 = 0$  (cioè privato del punto  $x_0 = 0$ ) e quindi non esiste un semi-intorno del punto in cui la funzione è concava. Si calcoli inoltre l'immagine della funzione.
4. La funzione  $f(x) = 1/x$  non ha un flesso in  $x_0 = 0$ , perché tal punto non appartiene al dominio di  $f$  (anche se  $f$  è concava per  $x < 0$  e convessa per  $x > 0$ ).
5. La funzione  $f(x) = |x| + x^3$  non ha un flesso in  $x_0 = 0$ , perché sebbene  $f$  sia concava per  $x < 0$  e convessa per  $x > 0$ , ha un punto angoloso in  $x = 0$ .

**Esercizi 5.3.1.** 1. Definire un punto angoloso in termini di tangenti.

2. Determinare i punti angolosi della funzione  $f(x) = |x^2 - 1|$  e provare che tali punti sono di minimo.

3. Considerare le funzioni, dette rispettivamente: seno iperbolico, coseno iperbolico e tangente iperbolica, definite da

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad e \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Provare che  $(\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . In altre parole, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , il punto  $(\cosh(t), \sinh(t)) \in \mathbb{R}^2$  appartiene all'iperbole di equazione  $x^2 - y^2 = 1$  (per questo le due funzioni  $\sinh$  e  $\cosh$  si chiamano iperboliche).

Provare che le funzioni iperboliche appartengono a  $C^\infty(\mathbb{R})$  e calcolarne la derivata. Determinare delle funzioni iperboliche: immagine (mediante la definizione), crescita, decrescenza ed eventuali funzioni inverse.

4. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 3x^2$ . Determinare gli intervalli nei quali  $f$  è convessa.

Svolgimento. La funzione  $f$  è derivabile e

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x.$$

Anche  $f'$  è derivabile e

$$f''(x) = -x^2 + 5x - 6.$$

Sappiamo che, se  $f$  è derivabile due volte in un intervallo  $J$ ,  $f$  è convessa (in tale intervallo) se e solo se  $f''(x) \geq 0$  per ogni  $x \in J$ . Studiamo quindi l'insieme in cui  $f''(x) \geq 0$ :

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \quad \iff \quad x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \iff \quad 2 \leq x \leq 3.$$

Ponendo quindi  $A = [2, 3]$ , risulta che:

- $f$  è convessa in  $A$ ;
- se  $f$  è convessa in un intervallo  $J$ , allora  $J \subseteq A$ .

Inoltre, dato che  $f$  è derivabile in  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ , e che in un intorno di ciascuno dei suddetti punti  $f''(x)$  cambia segno (cioè in un semi-intorno è positiva e nell'altro è negativa),  $x_1$  e  $x_2$  sono punti di flesso per  $f$ .

5. Studiare, per quanto possibile, la funzione definita da  $f(x) = |x|e^x$ .

Svolgimento. Si osservi che:

$D_f = \mathbb{R}$ ;  $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$ ;  $f(x) \geq 0 = f(0)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ; pertanto  $x = 0$  è un punto di minimo per  $f$ .

La  $f$  è superiormente illimitata perchè prodotto di due funzioni superiormente illimitate, quindi la sua immagine è  $[0, +\infty)$ , poichè è continua su tutto  $\mathbb{R}$ .

La  $f$  è prodotto di due funzioni derivabili in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e quindi anch'essa è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Non è derivabile in  $x = 0$ , dato che in tal punto la sua derivata destra vale 1 (essendo la derivata in  $x = 0$  di  $f_d(x) = xe^x$ ) mentre la derivata sinistra vale  $-1$  (dato che è la derivata in  $x = 0$  di  $f_s(x) = -xe^x$ ). Possiamo quindi affermare che  $x = 0$  è un punto angoloso. Risulta:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x+1) & \text{se } x > 0 \\ -e^x(x+1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Da cui segue che  $f'(x) = 0 \iff x = -1$ . Inoltre

$$f'(x) > 0 \iff (x > 0) \text{ e } (x < -1) \quad , \quad f'(x) < 0 \iff -1 < x < 0,$$

da cui si deduce (studiando gli intervalli di crescita e di decrescenza della  $f$ ) che la funzione ha un massimo relativo (ma non assoluto) in  $x = -1$ , che vale  $f(-1) = 1/e$ ,

ed un minimo relativo (che avevamo già trovato in quanto minimo assoluto) in  $x = 0$ .  
Risulta anche che  $f'$  è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2) & \text{se } x > 0 \\ -e^x(x+2) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Da cui segue che  $f''(x) = 0 \iff x = -2$ . Inoltre

$$f''(x) > 0 \iff (x > 0) \text{ e } (x < -2) \quad , \quad f''(x) < 0 \iff -2 < x < 0.$$

Quindi  $f$  è convessa negli intervalli  $(-\infty, -2]$  e  $[0, +\infty)$ , ed ha un flesso in  $x = -2$ , cosa che invece non accade in  $x = 0$  perché è un punto angoloso.

Per completare la descrizione del grafico servirebbe conoscere  $\ell = \inf f|_{(-\infty, -1)}$ . Dopo aver studiato i limiti potremo affermare che  $\ell = 0$ , per adesso sappiamo che non può essere un valore assunto (perché  $f$  è crescente in  $(-\infty, -1)$ ) e appartiene all'intervallo  $(0, 1/e)$ .

Possiamo ora descrivere il grafico di  $f$  partendo da "meno infinito":

$f$  cresce da valori "arbitrariamente vicini" a  $\ell$ , ed è convessa fino a  $x = -2$ , dove ha un flesso e diventa concava continuando a crescere fino ad  $x = -1$ , dove ha un massimo relativo. Dopodiché  $f$  decresce (è sempre concava) fino ad assumere il valore zero in  $x = 0$ , dove ha un punto angoloso. Successivamente  $f$  diventa convessa e crescente in tutto  $\mathbb{R}^+$ , assumendo valori "arbitrariamente" grandi. Lo studente disegni un grafico che corrisponde a questa descrizione, assumendo  $\ell = 0$ .

6. Studiare la derivabilità e i massimo e minimi relativi delle funzioni definite da

$$x \mapsto |x^3 - 3x^2 + 2x + 6| \quad \text{e} \quad x \mapsto -|x||x+1|/x, \quad \text{su } J = [-2, -1/2], [-1, 2], [-1/2, 1/2]$$

7. Studiare i punti stazionari e la convessità della funzione definita da

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x^5$$

8. Studio della concavità, convessità e dei punti di flesso delle funzioni definite da

$$f(x) = x + x^3, \quad |x| + 2x^4, \quad |x| + x^3$$

9. Determinare la classe di derivabilità delle funzioni definite da

$$f(x) = \exp(-|x|), \quad x \exp(-|x|).$$

Studiarne anche il grafico, per quanto possibile.

10. Dimostrare che esiste un rettangolo di area massima inscritto nel cerchio di raggio 3 e calcolarne l'area (esercizio n. 14 della dispensa degli esercizi).

11. Studiare la seguente funzione al variare di  $m \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2\pi x & x < -2\pi \\ \sin(x) & -2\pi \leq x \leq 0 \\ mx & x > 0 \end{cases}.$$

Determinarne la classe di derivabilità e studiarne il grafico.

12. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x+5}.$$

13. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x \sin(x)};$$

determinare massimi e minimi relativi. Esistono massimi e minimi assoluti?

14. Studiare, dove è possibile, dominio, segno, derivata prima e suo segno, massimi e minimi sia relativi che assoluti, derivata seconda e suo segno, flessi, delle seguenti funzioni

(a)  $\ln\left(\frac{x^2-x-2}{x-3}\right)$ ,

(b)  $e^{x^2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ,

(c)  $\sqrt{1-x^2} - \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}$ ,

(d)  $e^{\frac{x-3}{1-x}} - 1$ .

Provare a tracciarne il grafico.

### 5.3.2 Giovedì 17/11/11

**39-40 Formula di Taylor** La formula di Taylor è un capitolo del calcolo differenziale importante nelle applicazioni in quanto si occupa dell'approssimazione delle funzioni mediante polinomi.

Quando l'approssimazione è "locale", cioè riguarda punti "arbitrariamente vicini" ad un punto fissato  $x_0$ , si chiama *formula di Taylor col resto in forma di Peano* ed è uno strumento fondamentale nel calcolo dei limiti e nel capire "l'andamento" del grafico di una funzione  $f$  vicino al punto  $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$ .

Quando l'approssimazione è su un intero intervallo, cioè permette di dare una stima dell'errore su un intero intervallo  $[a, b]$ , si chiama *formula di Taylor col resto in forma di Lagrange*.

L'impostazione e le notazioni sono leggermente diverse da quelle del testo, inoltre il teorema fondamentale (di esistenza dell'approssimazione) è dato in ipotesi più forti (ma sufficienti allo scopo del nostro corso). La "traduzione" fra i due linguaggi è data (in maniera analoga a quanto visto nella Sezione 5.1.1.) da

$$\begin{aligned} \epsilon(h) &\iff o(1) \text{ per } h \rightarrow 0 \\ \epsilon(h)h^n &\iff o(h^n) \text{ per } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbiamo visto, per una funzione  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0$ , la *formula di Taylor del primo ordine di  $f$  in  $x_0$*  (col resto nella forma di Peano):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)(x - x_0).$$

Quando  $x_0 = 0$ , l'incremento della variabile indipendente è  $h = x$  e si ottiene l'uguaglianza

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \epsilon(x)x,$$

detta *formula di MacLaurin del primo ordine di  $f$* .

**Definizione 5.3.3** (di formula di Taylor col resto nella forma di Peano). *Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e  $x_0$  un punto di  $J$ . La formula di Taylor di ordine  $n$  di  $f$  in  $x_0$  col resto nella forma di Peano è un'uguaglianza del tipo*

$$f(x_0 + h) = T_n(h) + \epsilon(h)h^n,$$

dove  $T_n(h)$  è un polinomio di grado minore o uguale ad  $n$  (nella variabile  $h$ ), detto polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f$  in  $x_0$  (o di centro  $x_0$ ), e la funzione

$$E_n: h \mapsto f(x_0 + h) - T_n(h) = \epsilon(h)h^n$$

è chiamata resto della formula (ma sarebbe meglio chiamarla errore della formula). L'errore è il prodotto della potenza  $n$ -sima dell'incremento della variabile indipendente ( $h^n$ ) per una funzione infinitesima in  $x_0$ . La formula di Taylor di centro  $x_0 = 0$  si dice anche di MacLaurin. In tal caso anche il polinomio e il resto si dicono di MacLaurin (oltre che di Taylor di centro zero). Quando si vuole mettere in evidenza la funzione  $f$  ed il centro  $x_0$ , si usa la seguente notazione (confrontare anche il testo)

$$T_n = T_n[f, x_0] = T_{n,f,x_0}.$$

### Osservazioni.

- La formula di Taylor può anche essere scritta mediante la variabile  $x$ , riscrivere la precedente definizione in tale variabile.
- Ricordarsi che la scrittura  $E_n(h) = \epsilon(h)h^n$  non è una uguaglianza, ma una proprietà.
- Se  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0 \in J$ , allora risulta  $f(x_0 + h) = f(x_0) + \epsilon(h)$ , e tale uguaglianza rappresenta la formula di Taylor di  $f$  di ordine zero in  $x_0$ .
- La formula di Taylor di centro  $x_0$  di  $f(x)$  non è altro che la formula di MacLaurin della funzione definita da  $g(h) := f(x_0 + h)$ . Cioè si possono sempre usare le più convenienti formule di MacLaurin.
- Il polinomio di Taylor di ordine  $n$  di una funzione  $f$  avrà la seguente espressione:

$$T_n(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n,$$

dove  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono delle opportune costanti (che, come vedremo, sono univocamente associate ad  $f$ ). Non è detto però che il grado di  $T_n(h)$  sia proprio  $n$  (lo è soltanto quando  $a_n \neq 0$ ). Non confondiamo quindi l'ordine di una formula di Taylor col grado del suo polinomio (che non deve superare l'ordine, ma può essere anche minore). In altre parole, l'ordine di una formula di Taylor si giudica dal resto, e non dal polinomio. Ad esempio, vedremo in seguito che le uguaglianze

$$\sin(x) = x + \epsilon(x)x \quad \text{e} \quad \sin(x) = x + \epsilon(x)x^2$$

sono entrambe vere. La prima è la formula di MacLaurin di  $\sin(x)$  del prim'ordine e la seconda è del second'ordine. Entrambe hanno lo stesso polinomio di MacLaurin, ma la seconda, ovviamente, dà più informazioni della prima. Ad esempio, ci dice che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)-x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in 0, un'affermazione vera che non può essere dedotta dalla prima formula (pur essendo anch'essa vera).

- **Attenzione:** la formula di Taylor di una funzione non è un'approssimazione della funzione, ma un'uguaglianza. Il polinomio di Taylor, invece, fornisce una buona approssimazione della funzione in un intorno del centro (più piccolo è l'intorno e più elevato è il grado del polinomio, migliore è l'approssimazione).

**Definizione 5.3.4.** Dato un numero naturale  $n$ , il simbolo  $n!$  (che si legge “enne fattoriale”) denota il prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali ad  $n$ . È inoltre conveniente definire  $0! = 1$  (ciò semplifica la scrittura di alcune formule).

**Esempio.**  $1! = 1$ ,  $2! = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $3! = 2!3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ , ecc. In generale  $n! = (n - 1)n$ . Calcolare  $n!$  per  $n = 4, \dots, 10$ .

**Teorema 5.3.2** (senza dimostrazione). Se  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^n$ , allora, fissato  $x_0 \in J$ , si ha

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \epsilon(h)h^n,$$

per ogni  $h$  ammissibile (ossia, tale che  $x_0 + h \in J$ ).

**Teorema 5.3.3.** Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^n$  e sia  $x_0 \in J$ . Supponiamo che

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + \epsilon(h)h^n$$

per ogni  $h$  ammissibile (ossia, tale che  $x_0 + h \in J$ ). Allora

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

*Dimostrazione*(facoltativa). Il teorema di esistenza della formula di Taylor ci assicura che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \epsilon(h)h^n,$$

per ogni  $h$  ammissibile. Quindi, sottraendo le due uguaglianze, si ha

$$0 = (a_0 - f(x_0)) + (a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!})h + (a_2 - \frac{f''(x_0)}{2!})h^2 + \dots + (a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!})h^n + \epsilon(h)h^n,$$

per ogni  $h$  ammissibile (osserviamo infatti che la differenza di due funzioni  $\epsilon(h)$  è ancora una funzione  $\epsilon(h)$ ). Dobbiamo dunque dimostrare che se

$$0 = c_0 + c_1h + c_2h^2 + \dots + c_nh^n + \epsilon(h)h^n, \quad \forall h \text{ tale che } x_0 + h \in J,$$

allora  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $\dots$ ,  $c_n = 0$ . Poiché la suddetta uguaglianza è vera anche per  $h = 0$  (ricordarsi che  $x_0 \in J$ , e quindi  $h = 0$  è ammissibile), si ottiene  $c_0 = 0$ . Conseguentemente, cancellando  $c_0$ , si ha

$$0 = c_1h + c_2h^2 + \dots + c_nh^n + \epsilon(h)h^n, \quad \forall h \text{ tale che } x_0 + h \in J.$$

Pertanto, raccogliendo  $h$ , si ottiene

$$0 = h(c_1 + c_2h + \dots + c_nh^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}), \quad \forall h \text{ tale che } x_0 + h \in J.$$

La funzione

$$c_1 + c_2h + \dots + c_nh^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}$$

è dunque nulla per tutti gli  $h \neq 0$  tali che  $x_0 + h \in J$  e, di conseguenza, poiché è continua nel punto per  $h = 0$  (essendo somma e prodotto di funzioni continue), possiamo concludere che è nulla anche per  $h = 0$  (altrimenti si contraddirebbe il teorema della permanenza del segno per funzioni continue). Vale allora l'uguaglianza

$$0 = c_1 + c_2h + \dots + c_nh^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}, \quad \forall h \text{ tale che } x_0 + h \in J.$$

Di conseguenza, ponendo  $h = 0$ , si deduce che anche il coefficiente  $c_1$  deve essere nullo. Il risultato si ottiene procedendo allo stesso modo per passi successivi.  $\square$

**Esercizio da fare.** Applicare il teorema di esistenza della formula di Taylor per determinare le seguenti formule di MacLaurin

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \epsilon(x)x^n$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+2}$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \epsilon(x)x^{2n+1}$
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+2}$
- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \epsilon(x)x^{2n+1}$
- $1/(1+x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \epsilon(x)x^n$
- $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots + (-1)^{n-1} x^n + \epsilon(x)x^n$ , vedi l'esercizio 5.3.2 n.1.
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \epsilon(x)x^{2n}$ , vedi l'esercizio 5.3.2 n.2.
- $\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 + \dots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) + \epsilon(x)x^{2n+1}$ , vedi l'esercizio 5.3.2 n.3.

**Corollario 5.3.2.** Se  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^n$ , allora, fissato  $x_0 \in J$ , si ha

$$T_{n-1}[Df, x_0] = DT_n[f, x_0]$$

*Dimostrazione.* Per esercizio, basta scrivere le due formule e confrontarle.

**Esercizi 5.3.2** (da fare). 1. Applicare il precedente Corollario 5.3.2 per determinare la formula di MacLaurin della funzione  $x \mapsto \ln(1+x)$ .

Svolgimento. Poichè  $D \ln(x) = 1/x$ , possiamo scrivere

$$T_{n-1}[\ln', 1](h) = 1 - h + h^2 + \dots + (-1)^{n-1} h^{n-1}.$$

Definiamo il polinomio  $p_n$  con  $p_n(h) = h - h^2/2 + \dots + (-1)^{n-1} h^n/n$  e calcoliamo

$$D(T_n - p_n)(h) \equiv 0.$$

Poichè  $T_n$  e  $p_n$  sono funzioni di classe  $C^1(\mathbb{R})$ , possiamo applicare il punto 3 del Corollario (del Teorema di Lagrange) 5.2.2, per concludere che il polinomio  $T_n - p_n$  è costante. Poichè  $T_n(0) = \ln(1) = p_n(0) = 0$ , otteniamo, con un semplice cambiamento del nome della variabile, che

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots + (-1)^{n-1} x^n + \epsilon(x)x^n.$$

2. Usare il Teorema 5.3.3 e la formula di McLaurin della funzione  $f(x) = 1/(1+x)$  per ottenere

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \epsilon(x)x^{2n}$$

Suggerimento. Usare il cambiamento di variabile  $t = x^2$ .

3. Usare il precedente punto e il Corollario 5.3.2 per ottenere la formula di McLaurin della funzione  $\arctan$ .

4. Esempio di studio di funzione. Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Per prima cosa si nota che la funzione è pari e che  $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus 0)$  (questo perchè quoziente di due funzioni di classe  $C^\infty$ ). Per analizzare il comportamento in  $x = 0$ , si usa la formula di McLaurin del seno e si ottiene

$$f(x) = 1 + \epsilon(x) \quad \text{se } x \neq 0.$$

Ne segue che l'incremento in 0 della funzione,  $f(x) - 1 = \epsilon(x)$ , è una funzione infinitesima, cioè  $f$  è continua in  $x = 0$ . Si noti che  $f(0) = 1$  è l'unico valore che rende continua la funzione. Usando ancora la formula di McLaurin del seno otteniamo la seguente formula di McLaurin per  $f$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+1},$$

quindi, per l'unicità della formula, otteniamo

$$D^k f(0) = 0 \quad \text{se } k \text{ è dispari, mentre } D^{2n} f(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Avendo tutte le derivate in  $x = 0$ , la funzione risulta di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ , inoltre dalla precedente formula si deduce che  $f$  ha tangente orizzontale in  $x = 0$  e ha un massimo locale in  $x = 0$ .

**Poichè la funzione è pari ci limitiamo a studiarla per  $x \geq 0$ .**

(a)  $|f(x)| \leq |1/x|$  e  $|f(x)| = |1/x| \iff x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{N};$

(b)  $|f(x)| = 0 \iff x = k\pi, k \neq 0, k \in \mathbb{N};$

(c)  $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}, x \neq 0$

Dai punti 1 e 2 si deduce che il grafico di  $f$  oscilla fra i grafici  $y = \pm 1/x$  e quindi che l'ampiezza dell'oscillazione si riduce progressivamente allontanandosi dall'origine. Si deduce inoltre che ci saranno infiniti punti di massimo e minimo relativo.

Il punto (c) ci dice che non si possono calcolare esattamente i punti di massimo e minimo relativo, ma il teorema di Rolle ci assicura che c'è un punto a tangente orizzontale in ogni intervallo  $J_k = [k\pi, (k+1)\pi], k > 0$ . Per assicurarci che tale punto è unico, tenendo conto che  $f'(k\pi + \pi/2) \neq 0$ , si può provare che i due grafici  $y = x$  e  $y = \tan(x)$  si incontrano una sola volta in  $J_k$ . Verificarlo graficamente e notare che l'intersezione  $x_k$  appartiene a  $(k\pi, k\pi + \pi/2)$ .

Dal segno di  $f$  si deduce che  $x_k$  è di minimo relativo se  $k$  è dispari, in quanto è di minimo per  $f|_{J_k}$  (usare il teorema di Fermat per dimostrarlo); come conseguenza si ha anche che

$$-1/(k\pi) < f(x_k) < -1/(k\pi + \pi/2).$$

Analogamente  $x_k$  è di massimo relativo se  $k > 0$  è pari e

$$1/(k\pi) > f(x_k) > 1/(k\pi + \pi/2).$$

Si consiglia di studiare nei dettagli  $f|_{[\pi, 2\pi]}$  e  $f|_{[2\pi, 3\pi]}$  usando tutti i teoremi fin qui svolti.

In maniera analoga si prova che  $f|_{[-\pi, \pi]}$ , ha un solo punto a tangente orizzontale in  $x = 0$  che è quindi un punto di massimo.

A questo punto si può disegnare il grafico e provare che

- la funzione ha massimo uguale a 1 e un solo punto di massimo  $x = 0$
- la funzione ha anche minimo uguale a  $f(x_1)$  e due punti di minimo  $x = \pm x_1$

5. Calcolare la generica formula di McLaurin di  $f(x) = \sinh(x^4)$

## 5.4 Settimana 21-26/11/11. Par. 4.6, 7.12 - 7.13

### 5.4.1 Mercoledì 23/11/11.

41-42.

**Definizione 5.4.1** (di sommatoria, vedi anche il testo Par. 4.6.). *Si scrive*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{oppure} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \dots\dots$$

e si legge *sommatoria con con  $k$  che va da 1 a  $n$  di  $a_k$ .*

**Esercizi.**

1. Verificare che la scrittura  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  rappresenta la somma dei primi  $n$  numeri naturali.
2. **Leggere sul testo le proprietà delle sommatorie** (Par. 1.5) osservando che discendono dalle proprietà algebriche dei numeri reali
3. Riscrivere tutte le formule riguardanti l'approssimazione di Taylor mediante il simbolo di sommatoria.

**Esempio: il binomio di Newton.** Vedi gli Esercizi 5.4.1, n.2,3.

**Definizione 5.4.2.** *Dato un numero naturale  $n$  ed un numero naturale  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il numero*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*si chiama coefficiente binomiale e si denota col simbolo  $\binom{n}{k}$  che si legge “ $n$  su  $k$ ” (da non confondere con il rapporto  $n/k$ ).*

**Osservazioni.**

1. Si osserva che una delle due espressioni per la formula binomiale è definita anche per  $k = 0$ . Noi la assumiamo per definizione, cioè

$$\binom{n}{0} = 1.$$

2. Il coefficiente “ $n$  su  $k$ ” è un numero naturale (vedi gli esercizi sul binomio di Newton)

**Definizione 5.4.3.** *Dato un numero reale  $\alpha$  ed un numero naturale  $k$ , l'espressione*

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

si chiama coefficiente binomiale (generalizzato) e si denota col simbolo

$$\binom{\alpha}{k}$$

che si legge “ $\alpha$  su  $k$ ”. Conviene inoltre definire analogamente a quanto fatto per  $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

**Formula binomiale di McLaurin.**  $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \epsilon(x)x^n.$

In particolare se  $n \in \mathbb{N}$   $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$

*Dimostrazione* (facoltativa per esercizio). Basta applicare il teorema di esistenza della formula di Taylor. Perché nel caso di  $n \in \mathbb{N}$  l'errore  $n$ -esimo è 0?

**Esempi.** Formule di McLaurin delle funzioni definite da

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}, \sqrt{1+x}, \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Le formule di McLaurin che sono fin qui apparse sul registro delle lezioni devono essere imparate a memoria.

**Parte principale.** Sia  $f \in C^\infty(J)$  e  $x_0 \in J$ . Se esistono  $a \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tali che

$$f(x) = a(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \epsilon(x-x_0)$$

il termine  $a(x-x_0)^n$  si dice *parte principale* di  $f$  in  $x_0$ . La parte principale è il primo termine non nullo (se esiste) dell'approssimazione di Taylor e  $a = D^n f(x_0)/n!$ .

Particolarmente importante è la parte principale dell'incremento della funzione, che ci permette di descriverne “l'andamento vicino” ad  $x_0$ , infatti se posso scrivere

$$f(x) - f(x_0) = (a + \epsilon(x-x_0))(x-x_0)^n, \quad a \neq 0$$

posso trovare un intorno di  $x_0$  e  $a_1, a_2$  dello stesso segno di  $a$  (e vicini ad  $a$  quanto voglio, se restringo sufficientemente l'intorno) tali che  $a_1 \leq a \leq a_2$ . Posso quindi dedurre che “vicino ad  $x_0$ ” il grafico di  $f$  è racchiuso dai grafici  $x \mapsto a_1(x-x_0)^n, \quad x \mapsto a_2(x-x_0)^n$ , e ragionare nel seguente modo:

- il grafico della funzione, vicino al punto  $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$ , si comporta come il polinomio  $T_n: x \mapsto f(x_0) + a(x-x_0)^n$ , “quindi”
- disegno il grafico di  $T_n$  trasladando nel punto  $P_0$  il grafico del monomio  $x \mapsto ax^n$
- se  $n > 1$  osservo graficamente se si tratta di massimo, minimo locale o flesso, in dipendenza da  $n$  e dal segno di  $a = f^{(n)}(x_0)/n!$ . Se  $n = 1$  posso solo escludere che  $x_0$  sia un massimo o un minimo e per decidere della convessità locale devo trovare il successivo polinomio di Taylor il cui grado sia maggiore di uno.

Questa idea dell'approssimazione aiuta ad intuire i risultati, in particolare si può provare il seguente risultato.

**Teorema 5.4.1.** Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^n$ ,  $n > 0$ , in un intervallo  $J$  e sia  $x_0$  un punto interno a  $J$ . Supponiamo che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

e  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  (ossia, supponiamo che la prima derivata che non si annulla in  $x_0$  sia di ordine  $n$ ). Se  $n$  è pari, allora  $x_0$  è un punto estremante per  $f$  e, in particolare, è di minimo quando  $f^{(n)}(x_0) > 0$  ed è di massimo quando  $f^{(n)}(x_0) < 0$ . Se invece  $n$  è dispari, allora  $x_0$  non è un punto estremante.

*Dimostrazione*(facoltativa). Dalla formula di Taylor di centro  $x_0$  e ordine  $n$  si ottiene

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \epsilon(h)h^n \quad (\forall h \text{ tale che } x_0 + h \in J).$$

Dunque,

$$\Delta f(x_0)(h) = \varphi(h)h^n,$$

dove  $\Delta f(x_0)(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$  è l'incremento subito dalla funzione  $f$  nel passare dal punto  $x_0$  al punto  $x_0 + h$  e  $\varphi(h) = f^{(n)}(x_0)/n! + \epsilon(h)$ . Supponiamo, per fissare le idee, che  $f^{(n)}(x_0)$  sia positiva. Allora,  $\varphi(0) > 0$ , e quindi, essendo  $\varphi(h)$  continua nel punto  $h = 0$ , per il teorema della permanenza del segno esiste un  $\delta > 0$  per cui risulta  $\varphi(h) > 0$  per ogni  $h$  tale che  $|h| < \delta$ . Dunque, se  $n$  è pari si ha  $\Delta f(x_0)(h) > 0$  per  $0 < |h| < \delta$  e, conseguentemente,  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ . Se invece  $n$  è dispari, si ha  $\Delta f(x_0)(h) < 0$  per  $-\delta < h < 0$  e  $\Delta f(x_0)(h) > 0$  per  $0 < h < \delta$ , e pertanto  $x_0$  non è un punto estremante. Il caso  $f^{(n)}(x_0) < 0$  si tratta in modo analogo.  $\square$

**Esercizi da fare.**

1. Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^n$ ,  $n > 0$ , e sia  $x_0$  un estremo dell'intervallo  $J$ . Supponiamo che la prima derivata che non si annulla in  $x_0$  sia  $f^{(n)}$ . Usando il ragionamento intuitivo usato precedentemente stabilire, in dipendenza da  $n$  e dal segno di  $f^{(n)}(x_0)$ , se  $x_0$  è di massimo o minimo locale (conta anche sapere se  $x_0$  è il primo o secondo estremo). Inoltre (**facoltativo**) dimostrare il risultato ottenuto.
2. Sia  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^n$  e sia  $x_0$  un punto interno all'intervallo  $J$ . Supponiamo che esista  $n > 1$  tale che  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  e che valga la seguente formula di Taylor.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^n.$$

Usando il ragionamento intuitivo usato precedentemente stabilire, in dipendenza da  $n$  e dal segno di  $f^{(n)}(x_0)$ , se  $x_0$  è di flesso oppure la funzione è localmente concava o convessa (cioè esiste un intorno di  $x_0$  tale che .....

*Suggerimento.* Studiare il segno di  $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$  e ricordarsi le proprietà delle funzioni concave o convesse espresse mediante la tangente al grafico.

**Osservazione.** Abbiamo visto che il teorema di esistenza della formula di Taylor è utile per trovare le formule di MacLaurin delle funzioni elementari (cioè quelle non esprimibili combinandone altre mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione), per le altre funzioni è molto (ma molto) più pratico procedere combinando tra loro le formule di MacLaurin delle funzioni elementari, vedi anche i seguenti esercizi.

**Esercizi 5.4.1.** 1. Dato un polinomio di grado  $n$ , provare che il suo polinomio di Taylor di ordine maggiore o uguale a  $n$  centrato in un qualsiasi punto  $x_0$  è lui stesso; di conseguenza il resto è zero.

2. Provare la seguente formula (prima scrivere la formula per esteso e verificarla per  $n = 2, 3$ )

$$p_n(x) := (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Svolgimento.  $p_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$ , quindi possiamo scrivere  $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , anzi, dalla definizione di potenza  $n$ -sima, è facile vedere che  $a_0 = a_n = 1$  e che tutti i coefficienti  $a_k$  sono interi. La precedente uguaglianza può anche essere vista come una formula di McLaurin di ordine  $n$  per la funzione  $p_n$ , se scrivo

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \epsilon(x)x^n$$

dove  $\epsilon(x)$  è la funzione costantemente uguale a 0 (la funzione nulla è infinitesima in 0, verificare la definizione). Per il teorema di unicità segue

$$a_k = p_n^{(k)}(0)/k!$$

Si osserva che  $p_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$ ,  $p_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ , continuando si vede che  $p_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$  e infine  $p_n^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$ . Valutando le derivate in 0 si ottiene la formula desiderata.

3. Usando il precedente esercizio provare la seguente formula (Binomio di Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Suggerimento. Supponendo  $a \neq 0$  (altrimenti la formula è banalmente verificata) si può scrivere  $(a+b)^n = a^n(1+b/a)^n$ . Quindi ponendo  $x = b/a \dots$

4. Scrivere la formula binomiale per  $n = 1, 2$  per un generico  $\alpha$  e per  $\alpha = 1/3, -2, -1/3, 2/3$ . Scrivere la formula binomiale di ordine  $k \leq n$  per il polinomio  $p(x) = (1+x)^n$ .
5. Col cambiamento di variabile  $y = -x$ , dedurre, dalla formula di MacLaurin di  $1/(1+x)$ , la formula di MacLaurin di  $1/(1-x)$ . Più in generale, calcolare la formula di MacLaurin di  $(1-x)^\alpha$ .
6. Calcolare la formula di McLaurin di ordine 4 di  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  e dedurre l'andamento locale della funzione
7. Calcolare la formula di McLaurin di ordine 2 di  $f(x) = \ln(\cos(x))$  e dedurre che la funzione ha un punto di massimo locale in  $x = 0$  (che è anche un massimo locale).
8. Determinare la generica formula di Taylor di  $\ln(x)$ .

Svolgimento. Si deduce facilmente dalla formula di MacLaurin di  $\ln(1+x)$ . Fissato  $x_0 > 0$ , si ha infatti

$$\begin{aligned} \ln(x_0+h) &= \ln\left(x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right) = \ln(x_0) + \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right) \\ &= \ln(x_0) + \frac{h}{x_0} - \frac{h^2}{2x_0^2} + \frac{h^3}{3x_0^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{h^n}{nx_0^n} + \epsilon(h)h^n. \end{aligned}$$

9. Determinare la generica formula di Taylor di  $1/x$ .

Svolgimento. Fissato  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , si ha

$$\frac{1}{x_0+h} = \frac{1}{x_0(1+h/x_0)} = \frac{1}{x_0} - \frac{h}{x_0^2} + \frac{h^2}{x_0^3} - \dots + (-1)^n \frac{h^n}{x_0^{n+1}} + \epsilon(h)h^n.$$

10. Calcolo di una formula di MacLaurin di una funzione combinata. Consideriamo la funzione  $f(x) = x^2 \sin(2x)$  e determiniamone la formula di MacLaurin del quinto ordine. Si dovrà scrivere un'uguaglianza del tipo

$$f(x) = p_5(x) + \epsilon(x)x^5,$$

dove  $p_5(x)$  è un polinomio di grado minore o uguale a cinque. Grazie alla presenza del termine  $x^2$ , è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del terzo ordine di  $\sin(2x)$ , e moltiplicarla poi per  $x^2$ . Si osservi infatti che il prodotto di  $x^2$  per  $p_3(x) + \epsilon(x)x^3$ , dove  $p_3(x)$  è un polinomio di grado non superiore a tre, diventa  $p_5(x) + \epsilon(x)x^5$ , dove  $p_5(x)$  è di grado non superiore a cinque. Ricordiamo che per  $\sin(x)$  si ha

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \epsilon(x)x^3.$$

Poiché tale uguaglianza è verificata per ogni numero  $x$ , sostituendo il numero  $2x$  al posto di  $x$  si ottiene

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + 8\epsilon(2x)x^3 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Tenendo conto che  $8\epsilon(2x)$  è una funzione del tipo  $\epsilon(x)$ , si ha

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \epsilon(x)x^3$$

e quindi

$$f(x) = x^2(2x - \frac{4}{3}x^3 + \epsilon(x)x^3) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \epsilon(x)x^5.$$

Provare che possiamo scrivere anche

$$f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \epsilon(x)x^6.$$

11. Calcolo della derivata  $n$ -esima in un punto mediante la formula di Taylor. Determiniamo le derivate quarta e quinta e sesta nel punto  $x_0 = 0$  della funzione  $f(x) = x^2 \sin(2x)$ . Poiché abbiamo già provato che  $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \epsilon(x)x^6$ , il teorema di unicità della formula di Taylor ci assicura che  $f^{(4)}(0)/4! = f^{(6)}(0)/6! = 0$  e  $f^{(5)}(0)/5! = -4/3$ . Quindi  $f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$  e  $f^{(5)}(0) = -160$ .
12. Calcolo di una formula di Taylor di centro  $x_0 \neq 0$ . Calcoliamo la formula di Taylor del quarto ordine e centro  $x_0 = -1$  di

$$f(x) = 2x + (x + 1)^2 \cos(\pi x).$$

Poiché il centro  $x_0$  non è zero, conviene effettuare la sostituzione

$$x = x_0 + h = -1 + h.$$

In questo modo è come se si calcolasse la formula di MacLaurin di  $g(h) := f(-1+h)$ .

Si ha

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= 2(-1+h) + h^2 \cos(\pi h - \pi) \\ &= -2 + 2h + h^2 [\cos(\pi h) \cos(-\pi) - \sin(\pi h) \sin(-\pi)] \\ &= -2 + 2h - h^2 \cos(\pi h) = -2 + 2h - h^2(1 - \frac{\pi^2}{2} h^2 + \epsilon(h)h^3) \end{aligned}$$

$$= -2 + 2h - h^2 + \frac{\pi^2}{2} h^4 + \epsilon(h)h^5.$$

Si osserva che  $p(h) = -2 + 2h - h^2 + \frac{\pi^2}{2} h^4$  è l'approssimazione della funzione sia del quarto che del quinto ordine (perchè?).

Supponiamo ora di voler calcolare la derivata quarta nel punto  $x_0 = -1$  della funzione

$$f(x) = 2x + (x + 1)^2 \cos(\pi x).$$

Dato che di  $f(x)$  abbiamo già determinato la formula di Taylor del quarto ordine in  $x_0 = -1$ , è sufficiente applicare il teorema di unicità della formula di Taylor, il quale ci assicura che  $f^{(4)}(-1)/4!$  coincide col coefficiente  $\pi^2/2$  del monomio di quarto grado di detta formula. Pertanto

$$f^{(4)}(-1) = \frac{\pi^2}{2} 4! = 12\pi^2.$$

Quanto vale la derivata quinta?

Ulteriori importanti esempi di applicazioni della formula di Taylor si avranno nel calcolo dei limiti.

### 5.4.2 Giovedì 24/11/11.

**43-44.** Uno degli scopi della formula di Taylor è quello di esprimere il valore di una funzione  $f$  in un punto  $x$  tramite informazioni riguardanti il suo comportamento in un punto di riferimento  $x_0$  (si osservi infatti che nella suddetta formula il polinomio di Taylor dipende esclusivamente dai valori assunti da  $f$  e dalle sue derivate in  $x_0$ ). In generale non sarà possibile valutare con esattezza il valore di  $f$  in  $x$  conoscendo soltanto ciò che accade in  $x_0$ . Tuttavia, nella suddetta formula, tutto ciò che non riguarda il comportamento di  $f$  in  $x_0$  è confinato in un solo termine: il resto della formula. Se nel valutare  $f(x)$  si trascura il resto, si commette un errore, ma tale errore, talvolta, può essere maggiorato facilmente se si sa maggiorare il resto. Questa tecnica va comunemente sotto il nome di *formula di Taylor col resto in forma di Lagrange*, che noi tratteremo con ipotesi più restrittive di quelle del testo di riferimento.

**Teorema 5.4.2** (Formula di Taylor col resto in forma di Lagrange). *Sia  $f \in C^{n+1}(J)$  e siano  $x_0, x \in J$ . Allora esiste  $\theta \in \overline{x_0 x} = \begin{cases} (x_0, x) & x > x_0 \\ (x, x_0) & x < x_0 \end{cases}$ , tale che*

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{D^i f(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{D^{n+1} f(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

**Esempio.** L'errore che si commette nell'approssimare in  $(-\pi/2, \pi/2)$  il seno col suo polinomio di McLaurin di grado  $2n + 1$  (che è di ordine  $2n + 2$ ) cambia segno nel passare da valori negativi a valori positivi (determinare il segno per  $n$  dispari e pari) e decresce rapidamente al crescere di  $n$ . In particolare

$$|\sin(1) - \sum_{i=1}^n (-1)^i / i!| < 1 / (2n + 3)!$$

Esplicitare per qualche valore di  $n$  la stima dell'errore e disegnare col calcolatore il seno insieme ad alcuni suoi polinomi di Taylor.

Fare considerazioni analoghe per le funzioni cos e exp.

Guardare sul testo gli esempi sulla formula di Taylor col resto in forma di Lagrange.

**Esercizi** sull'approssimazione di Taylor.



## Capitolo 6

# Limiti delle funzioni reali di una variabile reale.

In questo capitolo affronteremo la definizione di limite seguendo sostanzialmente l'impostazione del testo di riferimento (e di qualsiasi altro testo).

### 6.1 Periodo 28/11-22/12/11. Par.3.1-3.6, 5.1-5.4,, 7.7.2, 7.12.1

#### 6.1.1 Mercoledì 18/11/11.

**45-46.** Con il concetto di limite si intende descrivere il comportamento dei valori  $f(x)$  di una funzione, quando la variabile  $x$  si “avvicina” ad un valore  $x_0$  o si “allontana indefinitamente” in direzione positiva o negativa sull'asse  $x$ . In particolare i valori  $f(x)$  si possono “avvicinare” ad un valore  $\ell \in \mathbb{R}$  o “allontanare indefinitamente” in direzione positiva o negativa sull'asse  $y$ . Per esprimere questi concetti diamo le seguenti definizioni.

**Definizione 6.1.1.** Con la notazione  $\mathbb{R}^*$  intendiamo l'insieme dei numeri reali estesi, ossia l'insieme costituito dai numeri reali con l'aggiunta dei simboli  $-\infty$  e  $+\infty$ .

$$\mathbb{R}^* = \{-\infty, \infty, a : a \in \mathbb{R}\}.$$

In  $\mathbb{R}^*$  estendiamo la relazione d'ordine con:

$$-\infty < a < +\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

È utile definire anche i simboli

$$a^+, \quad a^-, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Intorni in  $\mathbb{R}^*$ :

gli intorni di  $a \in \mathbb{R}$  sono  $I = (a - \delta, a + \delta)$ ,

gli intorni di  $a^+$  sono gli intorni destri di  $a$ ,  $I = [a, a + \delta)$ ,

gli intorni di  $a^-$  sono gli intorni sinistri di  $a$ ,  $I = (a - \delta, a]$ ,

gli intorni di  $-\infty$  sono le semirette negative  $I = (-\infty, a)$ ,

gli intorni di  $+\infty$  sono le semirette positive  $I = (a, +\infty)$ .

In quel che segue si darà significato alla scrittura

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$$

**Definizione 6.1.2.** Sia  $\alpha$  uno dei seguenti simboli:  $a, a^-, a^+, -\infty, +\infty$ . Un intorno forato di  $\alpha$  è un intorno di  $\alpha$  privato del punto  $\alpha$ .

Ovviamente i simboli  $a^-$  e  $a^+$  come numeri reali rappresentano ancora  $a$ . Quindi, ad esempio, togliere  $a^-$  dal suo intorno  $(a - \delta, a]$  significa togliere  $a$  (si ottiene così l'intorno forato  $(a - r, a)$  di  $a^-$ ). Inoltre gli intorni forati di  $\pm\infty$  sono gli intorni stessi.

**Definizione 6.1.3.** Sia  $\alpha$  uno dei seguenti simboli:  $a, a^-, a^+, -\infty, +\infty$ .  $\alpha$  si dice di accumulazione per l'insieme  $A \subset \mathbb{R}$  se per ogni intorno forato  $V$  di  $\alpha$  l'insieme  $V \cap A$  è non vuoto. In particolare  $+\infty$  ( $-\infty$ ) è di accumulazione per  $A$  se e solo se  $A$  è superiormente (inferiormente) limitato. Inoltre se  $a^+$  ( $a^-$ ) è di accumulazione per  $A$ , si dice anche che  $a$  è di accumulazione destro (sinistro) per  $A$ .

Se  $a \in A$  non è di accumulazione per  $A$ , si dice che  $a$  è un punto isolato di  $A$

**Definizione 6.1.4.** Si dice che una funzione  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ha la proprietà  $\mathcal{P}$  definitivamente per  $x \rightarrow \alpha$ , se  $\alpha$  è di accumulazione per  $D_f$  ed esiste un intorno forato  $U$  di  $\alpha$  tale che la proprietà  $\mathcal{P}$  vale per  $f|_{U \cap D_f}$ .

### Esempi.

1. Se  $I$  è un intervallo non degenero, cioè diverso da  $\emptyset$  e da  $\{a\}$ , ogni elemento  $\alpha \in I \cup \{\inf I, \sup I\} \subset \mathbb{R}^*$  è di accumulazione per  $I$ .
2. Il solo punto di accumulazione di  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  è lo zero.
3. Il solo elemento di  $\mathbb{R}^*$  che sia di accumulazione per  $\mathbb{N}$  è  $+\infty$ .
4.  $x^3 \pm 10^3 \sin(x) > x^2$  definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ .
5. Il polinomio  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$  è definitivamente crescente per  $x \rightarrow +\infty$

La seguente definizione è una estensione della Definizione 3.1.2 al caso di funzioni definite su insiemi  $A$  generici con un punto di accumulazione  $x_0$ .

**Definizione 6.1.5** (di limite finito-finito). Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per il dominio  $A$  di  $f$  (non occorre che  $x_0$  appartenga ad  $A$ ). Si dice che  $f(x)$  tende ad un numero reale  $l$  per  $x$  che tende ad  $x_0$ , e si scrive  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$ , oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che da  $0 < |x - x_0| < \delta$  e  $x \in A$  segue  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

### Osservazioni

1. Si noti che nella precedente definizione contano solo i valori che  $f$  assume in un intorno forato di  $x_0$ .
2. Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{e} \quad f : x \in A \mapsto x^2.$$

L'unico limite di  $f$  che posso fare è quello per  $x \rightarrow 0$ , inoltre è facile vedere (e lo studente lo verifichi usando la definizione) che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Questo esempio non rientra nella Definizione 3.1.2 poiché  $A$  non è un intervallo.

3. Il dominio della funzione definita da  $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$  è costituito soltanto da punti isolati ed ha come punti di accumulazione solo  $\pm\infty$ , pertanto non ha senso il limite per  $x$  che tende ad un qualunque punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
4. Affermare che  $f(x) \rightarrow \ell$  per  $x \rightarrow x_0$  equivale ad affermare che: per ogni intorno fissato  $V$  di  $\ell$ ,  $f(x) \in V$ , definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Come conseguenza, abbiamo  $f(x) \rightarrow 3$  per  $x \rightarrow -5$  se e solo se: per ogni  $\epsilon > 0$  fissato,  $|f(x) - 3| < \epsilon$ , definitivamente per  $x \rightarrow -5$ .
5. Ricordiamo che (nel caso di funzioni definite su intervalli)  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ .
6. Si fa notare che il concetto di limite per  $x \rightarrow x_0$  di una funzione è definito soltanto quando  $x_0$  è un punto di accumulazione per il dominio della funzione ma non occorre che appartenga al dominio, mentre per la continuità il punto deve stare nel dominio.
7. Ricordiamo che se  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$  e  $x_0 \notin D_f$ , allora  $f$  è estendibile per continuità a  $x_0$ .
8. Ricordiamo che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se....
9. Se due funzioni coincidono in un intorno forato di un punto  $x_0$ , allora hanno lo stesso limite per  $x \rightarrow x_0$  (se esiste). Provarlo per esercizio.
10. **Unicità del limite.** Se per  $x \rightarrow x_0$  risulta  $f(x) \rightarrow l_1$  e  $f(x) \rightarrow l_2$ , allora  $l_1 = l_2$ . Provarlo per esercizio.  
*Suggerimento.* Provarlo per assurdo fissando  $\epsilon = |l_1 - l_2|/2$  e sfruttando il fatto che  $x_0$  è un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ .
11. Cosa succederebbe se nella definizione di limite per  $x \rightarrow x_0$  prendessimo in considerazione il caso “ $x_0$  isolato”?

**Esempi.**

1. Si ha che  $\operatorname{sgn}(x^2) \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$  (pertanto la funzione definita da  $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2)$  non è continua nel punto  $x_0 = 0$ ). Lo studente verifichi il precedente limite usando la definizione.
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .
3. Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) + 1 - \cos(2x)}{x^2 + |x|x^2 \cos(3|x|)}.$$

Osserviamo che il denominatore della funzione di cui si vuol calcolare il limite può essere scritto nella forma  $x^2 g(x)$ , dove  $g : x \mapsto 1 + |x| \cos(3|x|)$  è una funzione continua e non nulla per  $x_0 = 0$ . Pertanto, per calcolare il limite, è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del secondo ordine del numeratore. Infatti, in un intorno forato di  $x_0 = 0$ , abbiamo

$$\frac{x \sin(x) + 1 - \cos(2x)}{x^2 + |x|x^2 \cos(3|x|)} = \frac{x(x + x\epsilon(x)) + 2x^2 + x^2\epsilon(x)}{x^2 g(x)} = \frac{3 + x\epsilon(x)}{g(x)}.$$

Ma  $\frac{3+x\epsilon(x)}{g(x)}$  è continua in  $x_0 = 0$ , quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) + 1 - \cos(2x)}{x^2 + |x|x^2 \cos(3|x|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \epsilon(x)}{g(x)} = \frac{3 + \epsilon(0)}{g(0)} = 3.$$

□

Si potrebbe continuare a dare tutte le possibili definizioni di limite nei seguenti venticinque casi:  $f(x)$  tende a  $l, l^-, l^+, -\infty, +\infty$  per  $x$  che tende a  $x_0, x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty$ . È invece più semplice dare un'unica definizione valida per tutti i casi, mettendo così in evidenza come il concetto di limite, così fondamentale in Analisi Matematica, sia in realtà unico. Per questo occorre che sia chiaro il concetto di intorno (e di intorno forato) di uno qualunque dei simboli  $a, a^-, a^+, -\infty, +\infty$ , che abbiamo definito in  $\mathbb{R}^*$ . Nella definizione che segue la lettera  $\alpha$  rappresenta uno qualunque dei simboli  $x_0, x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty$  e la lettera  $\gamma$  uno qualunque dei simboli  $l, l^-, l^+, -\infty, +\infty$  ( $x_0$  e  $l$  sono numeri reali).

**Definizione 6.1.6.** *Supponiamo che  $\alpha$  sia un punto di accumulazione per il dominio  $D_f$  di una funzione  $f$ . Si dice che  $f(x)$  tende a  $\gamma$  per  $x$  che tende ad  $\alpha$  (si scrive  $f(x) \rightarrow \gamma$  per  $x \rightarrow \alpha$ ) se per ogni intorno  $V$  di  $\gamma$  esiste un intorno forato  $U$  di  $\alpha$  tale che se  $x \in U$  e  $x \in D_f$  allora  $f(x) \in V$ . Come per il caso di limite finito-finito, per indicare che  $f(x) \rightarrow \gamma$  per  $x \rightarrow \alpha$  si usa anche dire che il limite per  $x$  che tende ad  $\alpha$  di  $f(x)$  è uguale a  $\gamma$ , e si scrive*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \gamma.$$

### Esempi e complementi.

1. (Definizione equivalente di limite laterale). Sia  $x_0$  un punto di accumulazione destro per il dominio di  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f(x)$  tende ad  $\gamma$  per  $x$  che tende ad  $x_0^+$  (o per  $x$  che tende ad  $x_0$  da destra) se per ogni intorno  $V$  di  $\gamma$  esiste  $\delta > 0$  tale che da  $x_0 < x < x_0 + \delta$  e  $x \in A$  segue  $f(x) \in V$ . In questo caso si scrive anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \gamma$$

Analogamente, se  $x_0$  è un punto di accumulazione sinistro per  $A$ , si dice che  $f(x) \rightarrow \gamma$  per  $x \rightarrow x_0^-$  se... (completare per esercizio).

2. **Teorema.** Sia  $x_0$  un punto di accumulazione bilatero (cioè sia sinistro che destro) per il dominio di  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f(x) \rightarrow \gamma$  ( $\gamma = l, l^\pm, +\infty, -\infty$ ) per  $x \rightarrow x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \gamma.$$

Provare il teorema per esercizio e, mostrare come applicazione che il limite di  $\text{sgn}(x)$  per  $x \rightarrow 0$  non esiste.

3. (Definizione equivalente di limite per eccesso e difetto nel caso finito-finito).  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$  ( $\ell^-$ ) si legge anche  $f(x)$  tende a  $\ell^+$  (risp.  $\ell^-$ ) per  $x$  che tende ad  $x_0$  significa che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  e  $f(x) \geq \ell$  ( $\leq \ell$ ) in un intorno forato di  $x_0$ . In questo caso si dice anche che  $\ell$  è il *limite per eccesso (difetto)* di  $f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ .
4. (Definizione equivalente di limite per eccesso e difetto). Si ha che  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell^+$  ( $\ell^-$ ) significa che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad f(x) \geq \ell \quad (\leq \ell) \quad \text{in un intorno forato di } \alpha.$$

In questo caso si dice anche che  $\ell$  è il *limite per eccesso (difetto)* di  $f(x)$  per  $x \rightarrow \alpha$ . Verificarlo per esercizio.

5. (Definizione equivalente di limite finito-infinito).  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ( $-\infty$ ) si legge anche  $f(x)$  tende a  $+\infty$  (risp.  $-\infty$ ) per  $x$  che tende ad  $x_0$  e significa che per ogni  $k > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che da  $0 < |x - x_0| < \delta$  e  $x \in A$  segue  $f(x) > k$  (risp.  $f(x) < -k$ ).

6. (Definizione equivalente di limite laterale nel caso finito–infinito).  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$   
 si legge anche  $f(x)$  tende a  $+\infty$  per  $x$  che tende ad  $x_0^+$  e significa che per ogni  $k > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che da  $x_0 < x < x_0 + \delta$  e  $x \in A$  segue  $f(x) > k$
7. (Definizione equivalente di limite infinito–finito).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  si legge anche  $f(x)$  tende a  $\ell$  per  $x$  che tende ad  $+\infty$  e significa che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $h \in \mathbb{R}$  tale che da  $x > h$  e  $x \in A$  segue  $|f(x) - \ell| < \epsilon$ .
8. Dare le definizioni estese dei rimanenti casi
9. Dai grafici delle “funzioni elementari” dedurre i loro limiti per  $x \rightarrow \alpha$ , dove  $\alpha$  è un qualsiasi elemento di  $\mathbb{R}^*$  di accumulazione per il loro dominio.

**Definizione 6.1.7.** Sia  $f$  una funzione definita su una semiretta positiva (negativa). Se  $f(x)$  tende a  $\ell$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  ( $-\infty$ ), si dice che la retta di equazione  $y = \ell$  è un asintoto orizzontale che viene detto anche asintoto orizzontale destro (sinistro).

**Definizione 6.1.8.** Sia  $f$  una funzione definita in un intorno forato di  $x_0^+$  ( $x_0$  può appartenere o no al dominio di  $f$ ). Se  $f(x)$  tende a  $+\infty$  ( $-\infty$ ) per  $x$  che tende a  $x_0^+$ , si dice che la retta di equazione  $x = x_0$  è un asintoto verticale che viene detto anche asintoto verticale destro. Analoga definizione si da per l’asintoto verticale sinistro.

**Esercizi 6.1.1.** 1. Affermare che  $f(x) \rightarrow \beta$  per  $x \rightarrow \alpha$  equivale ad affermare che: per ogni intorno fissato  $V$  di  $\beta$ ,  $f(x) \in V$ , definitivamente per  $x \rightarrow \alpha$ . Quindi abbiamo  $f(x) \rightarrow 3$  per  $x \rightarrow -\infty$  se e solo se: per ogni  $\epsilon > 0$  fissato,  $|f(x) - 3| < \epsilon$ , definitivamente per  $x \rightarrow -\infty$ .

2. Dare esempi simili al precedente per altri tipi di limite.
3. Prima graficamente e poi usando la definizione verificare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x)^a = 0, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

4. Descrivere la relazione fra limite destro (sinistro) e i concetti di funzione continua e derivabile a destra (sinistra).
5. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Svolgimento. Fissato un arbitrario  $k > 0$ , studiamo la disequazione  $1/x^2 > k$  e proviamo che è soddisfatta in un intorno forato di  $x_0 = 0$  (cioè un intorno di  $x_0$  privato del punto  $x_0$ ). Dato che  $x^2$  e  $k$  sono positivi (ricordarsi che  $x \neq 0$ ), tale disequazione è equivalente a  $0 < x^2 < 1/k$ . Quindi  $1/x^2 > k$  se (e solo se)  $0 < |x| < 1/\sqrt{k}$ . Di conseguenza, un qualunque intorno forato di raggio (positivo)  $\delta \leq 1/\sqrt{k}$  fa al caso nostro.

6. Usando la definizione verificare che la funzione  $f(x) = 1/x$  tende a  $-\infty$  per  $x \rightarrow 0^-$ .  
 Svolgimento. Fissiamo  $k > 0$  e determiniamo  $\delta > 0$  in modo che si abbia  $1/x < -k$  per  $x \in (-\delta, 0)$ . Occorre quindi studiare la disequazione  $1/x < -k$ . Poiché  $x < 0$ , moltiplicando per  $x$  entrambi i membri della disequazione si ottiene  $1 > -kx$ . Moltiplicando ancora entrambi i membri per  $-1/k$  risulta  $-1/k < x$ . Tenendo ancora conto che  $x < 0$ , possiamo concludere che la disequazione  $1/x < -k$  è verificata per  $x \in (-\delta, 0)$ , dove  $\delta = 1/k$ .

7. Usando la definizione verificare che la funzione  $1/x$  tende a zero per  $x \rightarrow -\infty$  (anche per  $x \rightarrow +\infty$ ).

Svolgimento. Fissato  $\epsilon > 0$ , mostriamo che esiste un intorno di  $-\infty$  (cioè una semiretta sinistra) in cui è soddisfatta la disequazione  $|1/x| < \epsilon$ . Poiché  $x \rightarrow -\infty$  si può supporre che  $x$  sia negativo (infatti per la verifica del limite basta restringere la funzione  $1/x$  all'intorno  $(-\infty, 0)$  di  $-\infty$ ). Per  $x < 0$  la disequazione  $|1/x| < \epsilon$  è equivalente a  $-1/x < \epsilon$ . Moltiplicando per  $x$  entrambi i membri di quest'ultima disequazione (e tenendo conto che  $x$  è negativo) si ottiene  $-1 > \epsilon x$ . Dato che  $\epsilon > 0$ , dalla moltiplicazione di entrambi i membri dell'ultima disequazione per  $1/\epsilon$  si ottiene  $-1/\epsilon > x$ . Possiamo quindi concludere che, fissato  $\epsilon > 0$ , la disuguaglianza  $|1/x| < \epsilon$  è soddisfatta per  $x < -1/\epsilon$  (o un qualunque altro numero minore di  $-1/\epsilon$ ).

8. Usando la definizione provare i seguenti limiti ( $x_0$  è un numero reale)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} 1/(x - x_0) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} 1/(x - x_0)^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/(x - x_0) = 0^\pm.$$

Stabilire inoltre per quali  $n \in \mathbb{N}$  esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  di  $1/(x - x_0)^n$ .

9. Usando la definizione provare che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/(x - x_0)^n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ . Determinare inoltre, al variare di  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , quali dei precedenti limiti sono per difetto o per eccesso.
10. Abbiamo visto con degli esempi che per verificare un limite (cioè per provare la veridicità di un limite mediante la definizione) occorre studiare una disequazione. Si osservi, però, che non importa trovarne tutte le soluzioni (talvolta è un'impresa impossibile senza ricorrere ai metodi numerici): è sufficiente provare che la disequazione è soddisfatta in un intorno forato del punto a cui tende la variabile indipendente. Ad esempio, facciamo la verifica del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x^3 + 2 + \sin(x)} = 0.$$

Fissato  $\epsilon > 0$ , occorre provare che la disequazione

$$\left| \frac{1}{x^2 + x^3 + 2 + \sin(x)} \right| < \epsilon$$

è soddisfatta in un intorno di  $+\infty$  (ossia in una semiretta del tipo  $(h, +\infty)$ ). Per far ciò è conveniente maggiorare

$$\left| \frac{1}{x^2 + x^3 + 2 + \sin(x)} \right|$$

con una funzione più semplice  $g(x)$  per la quale risulti facile verificare che  $g(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Innanzi tutto, poiché  $x \rightarrow +\infty$ , si può supporre che  $x > 0$  (basta restringere la funzione alla semiretta  $(0, +\infty)$ ). Avendo supposto ciò, si ha

$$\left| \frac{1}{x^2 + x^3 + 2 + \sin(x)} \right| = \frac{1}{x^2 + x^3 + 2 + \sin(x)} \leq \frac{1}{x^2 + x^3 + 2 - 1} < \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{x^2}.$$

Dunque, la disequazione iniziale è indubbiamente verificata se  $1/x^2 < \epsilon$ , e questo accade nella semiretta  $x > h := 1/\sqrt{\epsilon}$ .

### 6.1.2 Giovedì 1/12/11

**47-48.** Per calcolare i limiti delle funzioni combinate conviene estendere (parzialmente) a  $\mathbb{R}^*$  le operazioni di somma e prodotto.  $\mathbb{R}^*$ , con le operazioni estese, viene detto *algebra dei reali estesi* o anche *algebra dei limiti*. Definiamo:

$$\begin{aligned} \pm\infty + a &= \pm\infty, & (\pm\infty) + (\pm\infty) &= \pm\infty, \\ a(\pm\infty) &= \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0, \end{cases} & (\pm\infty)(\pm\infty) &= +\infty, & (+\infty)(-\infty) &= -\infty \\ \frac{a}{\pm\infty} &= 0, & 1/0^\pm &= \pm\infty, & 1/\pm\infty &= 0^\pm. \end{aligned}$$

Non sono invece definite le seguenti espressioni, dette *forme indeterminate*:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0/0, \quad 0(\pm\infty), \quad (\pm\infty)/(\pm\infty).$$

Numerosi altri casi si ottengono facilmente dai precedenti, ad esempio:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{0^+} &= (-2) \cdot \frac{1}{0^+} = (-2) \cdot (+\infty) = -\infty, \\ \frac{-\infty}{0^-} &= (-\infty) \cdot \frac{1}{0^-} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Il risultato che segue facilita il calcolo dei limiti evitando di ricorrere ogni volta alla definizione. Ovviamente per dimostrarlo la definizione è inevitabile.

**Teorema 6.1.1** (senza dimostrazione). *Siano  $f_1$  ed  $f_2$  due funzioni reali di variabile reale. Supponiamo che per  $x \rightarrow \alpha$  risulti  $f_1(x) \rightarrow \gamma_1$  e  $f_2(x) \rightarrow \gamma_2$ . Allora, quando (nei reali estesi) ha senso, per  $x \rightarrow \alpha$  si ha:*

- 1)  $f_1(x) + f_2(x) \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ ;
- 2)  $f_1(x)f_2(x) \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ ;
- 3)  $f_1(x)/f_2(x) \rightarrow \gamma_1/\gamma_2$ .

**Esempio.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ . Si noti che nel calcolo del limite

è essenziale sapere che, per  $x$  che tende a  $(\pi/2)^-$ , non solo  $\cos(x) \rightarrow 0$ , ma anche che  $\cos(x) \rightarrow 0^+$ .

**Significato delle forme indeterminate** Riportiamo alcuni esempi per mostrare come, nell'algebra dei reali estesi, non sia conveniente definire le *forme indeterminate*. Ogni definizione infatti porterebbe a delle incongruenze. Il significato di forma indeterminata è il seguente: se il limite della somma o del prodotto di due funzioni si presenta in forma indeterminata, senza ulteriori informazioni sulle funzioni, non è possibile concludere niente, ovvero tutto può accadere. Ad esempio, se per lo studio del limite per  $x \rightarrow +\infty$  di  $f_1(x) + f_2(x)$  si sa soltanto che  $f_1(x) \rightarrow +\infty$  e  $f_2(x) \rightarrow -\infty$  non possiamo concludere niente sul comportamento di  $f_1(x) + f_2(x)$ . Ovviamente, se invece possiamo precisare che  $f_1(x) = x^2$  e  $f_2(x) = -x$ , allora possiamo dedurre:  $x^2 - x = x(x - 1)$ , quindi, in base al teorema fondamentale per il calcolo dei limiti, si ottiene  $x(x - 1) \rightarrow (+\infty) \cdot (+\infty - 1) = +\infty$ ". Ecco quattro esempi di coppie di forme (apparentemente) indeterminate dal comportamento contrastante:

$$\begin{aligned} (\pm\infty - (\pm\infty)) \quad x - x &\rightarrow 0 && \text{per } x \rightarrow +\infty; \\ (\pm\infty - (\pm\infty)) \quad x^2 - x &\rightarrow +\infty && \text{per } x \rightarrow +\infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0(\pm\infty)) \quad x(1/x) &\rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0; \\ (0(\pm\infty)) \quad x^2(1/x) &\rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0/0) \quad x/x &\rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0; \\ (0/0) \quad x^2/x &\rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pm\infty/\pm\infty) \quad x/x &\rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty; \\ (\pm\infty/\pm\infty) \quad x^2/x &\rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Esercizi 6.1.2.** 1. Determinare graficamente se i seguenti limiti esistono e quanto valgono ( $x_0$  è un numero reale)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} 1/(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} 1/(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Giustificare i risultati ottenuti con la teoria fin qui svolta.

2. **Limiti delle funzioni razionali:** fondamentale, vedi anche il testo.

3. **Guardare sul testo la definizione di cuspidi e punto a tangente verticale e confrontarla con la Definizione 5.2.3.**

4. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^2}$ .

*Svolgimento 1.* Osserviamo che è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del secondo ordine della funzione al numeratore (non ci preoccupa, infatti, calcolare il limite del rapporto tra il resto di detta formula e il denominatore). Ricordando gli sviluppi di MacLaurin di seno ed esponenziale scriviamo

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= e^{x + \epsilon(x)x^2} = 1 + (x + \epsilon(x)x^2) + \frac{1}{2}(x + \epsilon(x)x^2)^2 + \epsilon(x + \epsilon(x)x^2)(x + \epsilon(x)x^2)^2 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x). \end{aligned}$$

Si abbia cura di provare che la funzione

$$\epsilon(x)x^2 + \epsilon(x)x^3 + \frac{1}{2}\epsilon(x)^2x^4 + \epsilon(x + \epsilon(x)x^2)(1 + \epsilon(x)x)^2x^2$$

è del tipo  $\epsilon(x)x^2$ . Segue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \epsilon(x) \right) = +\infty + \frac{1}{2} + 0 = +\infty.$$

*Svolgimento 2.* Dall'uguaglianza

$$e^x = 1 + x + \epsilon(x)x$$

si deduce che

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \epsilon(\sin(x))\sin(x).$$

Quindi, ricordando che  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ , si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left( \frac{\sin(x)}{x} + \epsilon(\sin(x)) \frac{\sin(x)}{x} \right) = +\infty \cdot (1 + \epsilon(0) \cdot 1) = +\infty.$$

5. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x + 3}{4x^2 - 2x + 1}$ .

6. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{4x^2 - 2x}$ .

Svolgimento. Per  $x \neq 0$ , vale  $\frac{x^3 + x}{4x^2 - 2x} = \frac{x^2 + 1}{4x - 2}$ . Questa nuova funzione è continua nell'origine dove assume valore  $-1/2$ . Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{4x^2 - 2x} = -\frac{1}{2}.$$

7. Determinare il polinomio di McLaurin di grado 2 della funzione  $\cos(\pi + x)$  e usarlo per determinare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione  $f(x) = \cos(\sqrt{x})$  attorno al punto  $x_0 = \pi^2$ . Calcolare quindi, al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^2} \frac{f(x) + 1}{x^n}$$

8. Calcolare, se esistono i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \ln(1 + x^2)}{x^4 + x^7}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sin(x) + \frac{1}{2}x^2 - 1}{3x^3 + 8x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 1 - 2\cos(x)}{x + 11x + 3x^8}.$$

9. Studiare le seguenti funzioni, determinandone anche gli eventuali asintoti.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 4}, \quad f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}},$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

### 6.1.3 Mercoledì 7/12/11.

49-50. I seguenti due teoremi sono casi particolari (ma sufficienti per gli scopi del corso) di un teorema più generale che può essere enunciato sulla relazione fra limite e composizione di funzioni.

**Teorema 6.1.2** (del cambiamento di variabile per funzioni continue). *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite su intervalli. Se  $f(x) \rightarrow \beta$  per  $x \rightarrow \alpha$  e  $g(y) \rightarrow \gamma$  per  $y \rightarrow \beta$ , allora si ha*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \beta} g(y) = \gamma.$$

**Teorema 6.1.3** (del passaggio al limite per funzioni continue). *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali di variabile reale. Se  $f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow \alpha$  e  $g$  è continua in  $l$ , allora quando ha senso (cioè quando  $\alpha$  è un punto di accumulazione per  $g \circ f$ ) si ha*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)\right) = g(l).$$

**Esercizio da fare.** Riflettere sulla differenza fra i due teoremi e (**facoltativo**) provare il precedente teorema.

**Teorema di de L'Hôpital** per il calcolo delle forme indeterminate, vedi testo.

**Esempi: limiti notevoli.**

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x^r = 0, \forall r > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r/e^x = 0, \forall r > 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r e^x = 0, \forall r > 0.$

**Esercizio da fare.** Usando il cambiamento di variabile dimostrare che da  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$  segue:

- a.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln(x) = 0, \forall a > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$   
*Suggerimento.* Nel primo caso usare la sostituzione  $y = x^a$ , nel secondo caso usare la sostituzione  $y = 1/x$ .
- b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ , sostituzione consigliata  $y = e^{-x}$ .
- c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ , sostituzione consigliata  $y = e^x$ . Dimostrare inoltre che, per ogni  $r < 1$ , da b. segue  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$  e da c. segue  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r e^x = 0$ .

### Risultati fondamentali da sapere

1. *Unicità del limite*, vedi il testo.
2. *Permanenza del segno per i limiti*, vedi il testo.
3. (Limite della restrizione). Siano  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale, sia  $B \subset A$  e sia  $\alpha$  un punto di accumulazione per  $A$  e per  $B$ . Se, per  $x \rightarrow \alpha$ ,  $f(x) \rightarrow \gamma$ , allora  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f|_B(x) = \gamma$ . Dimostrazione per esercizio.
4. (Dei carabinieri). Siano  $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$  tre funzioni reali di variabile reale e sia  $\alpha$  un punto di accumulazione per  $A$ . Supponiamo  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  per ogni  $x \in A$ . Se  $f(x) \rightarrow \gamma$  e  $h(x) \rightarrow \gamma$  per  $x \rightarrow \alpha$ , allora anche  $g(x) \rightarrow \gamma$  (per  $x \rightarrow \alpha$ ).

*Dimostrazione (facoltativa).* Caso  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Fissiamo  $\epsilon > 0$ . Poiché  $f(x) \rightarrow \gamma$ , esiste un intorno forato  $U$  di  $\alpha$  tale che per ogni  $x \in U \cap A$  si ha  $\gamma - \epsilon < f(x) < \gamma + \epsilon$ . Dato che anche  $h(x) \rightarrow \gamma$ , esiste un intorno forato  $W$  di  $\alpha$  tale che  $x \in W \cap A \implies \gamma - \epsilon < h(x) < \gamma + \epsilon$ . Di conseguenza, se  $x \in A$  appartiene all'intorno forato  $U \cap W$  di  $\alpha$ , si ha

$$\gamma - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \gamma + \epsilon.$$

Tenendo conto soltanto di ciò che ci serve, si ottiene  $\gamma - \epsilon < g(x) < \gamma + \epsilon$  per ogni  $x \in U \cap W \cap A$ , e la definizione di limite è verificata. I due casi  $\gamma = -\infty$  e  $\gamma = +\infty$  sono lasciati per esercizio allo studente.  $\square$

**Esercizio obbligatorio.** Nel teorema dei carabinieri, nei casi in cui  $\gamma = -\infty$  o  $\gamma = +\infty$ , uno dei carabinieri è superfluo (quale?).

**Esercizi 6.1.3.** 1. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln((x^2 + 1)/(x^3 + 3))$ .

Svolgimento. Per le proprietà dei limiti delle funzioni razionali abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)/(x^3 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0^+$$

applicando il teorema del cambiamento di variabile (posso farlo perché  $\ln$  è continua) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln((x^2 + 1)/(x^3 + 3)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(y) = -\infty$$

2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x^2}{1+x} \right).$$

Svolgimento. Cominciamo col mettere in evidenza (cioè raccogliere) i termini di

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x^2}{1+x}$$

che prevalgono quando  $x \rightarrow -\infty$  (è una buona norma da seguire). Si ha

$$f(x) = \sqrt{x^2(1 + 2/x)} + \frac{x^2}{x(1/x + 1)} =$$

$$|x|\sqrt{1 + 2/x} + \frac{x}{1 + 1/x} = |x|(1 + 2/x)^{1/2} + x(1 + 1/x)^{-1}.$$

Con le sostituzioni  $t = 2/x$  e  $t = 1/x$  nelle due uguaglianze

$$(1 + t)^{1/2} = 1 + t/2 + \epsilon(t)t \quad e \quad (1 + t)^{-1} = 1 - t + \epsilon(t)t$$

si ha

$$f(x) = |x| \left( 1 + 1/x + \frac{2\epsilon(2/x)}{x} \right) + x \left( 1 - 1/x + \frac{\epsilon(1/x)}{x} \right).$$

Tenendo conto che si può supporre  $|x| = -x$  (dato che  $x \rightarrow -\infty$ ), risulta

$$f(x) = -x - 1 - 2\epsilon(2/x) + x - 1 + \epsilon(1/x) = -2 - 2\epsilon(2/x) + \epsilon(1/x).$$

Quindi, applicando il teorema del passaggio al limite per funzioni continue, per  $x \rightarrow -\infty$  si ottiene

$$f(x) \rightarrow -2 - 2\epsilon(0) + \epsilon(0) = -2.$$

3. Usando i limiti notevoli, verificare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r/a^x = 0, \forall r > 0$  e  $a > 1$ .

4. Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" del teorema dei carabinieri, nel caso  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Dimostrazione sbagliata. Denotiamo con  $l$  il limite (per  $x \rightarrow \alpha$ ) di  $g(x)$ . Occorre provare che  $l = \gamma$ . Poiché  $f(x) \leq g(x)$  e  $f(x) \rightarrow \gamma$ , dal teorema del confronto dei limiti si deduce  $\gamma \leq l$ . Analogamente, tenendo conto che  $g(x) \leq h(x)$  e che anche  $h(x) \rightarrow \gamma$ , si ha  $l \leq \gamma$ . Pertanto  $l = \gamma$ .

5. Provare che una funzione  $f(x)$  tende a zero per  $x \rightarrow \alpha$  se e solo se tende a zero  $|f(x)|$ .

Suggerimento. Scrivere le definizioni di limite per entrambi i casi e confrontarle.

6. *Provare il seguente Corollario (del teorema dei carabinieri). Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali di variabile reale. Supponiamo che  $f(x)$  sia limitata e che  $g(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \alpha$ . Allora (quando ha senso)  $f(x)g(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \alpha$ .*

*Suggerimento.. Supponiamo che il limite abbia senso, cioè che  $\alpha$  sia un punto di accumulazione per il dominio  $D_f \cap D_g$  della funzione prodotto  $f(x)g(x)$ . Dato che  $f(x)$  è limitata, esiste una costante  $c$  tale che  $|f(x)| \leq c$  per ogni  $x \in D_f$ . Pertanto (per ogni  $x \in D_f \cap D_g$ ) risulta*

$$0 \leq |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq c|g(x)|.$$

*La funzione  $|f(x)g(x)|$  è dunque "incastrata" tra due carabinieri ..., completare la dimostrazione.*

7. *Provare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$  e spiegare per quale motivo per ottenere tale risultato non si può applicare l'algebra dei limiti.*

8. *Provare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) + 2 \cos(3x)}{x^2 + x + \sqrt{x}} = 0$ .*

9. *Verificare utilizzando la definizione i seguenti limiti:*

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10x^3 - 30x^2 + 23x - 12 = +\infty,$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10x^3 - 30x^2 + 23x - 12 = -\infty,$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x^2 - 6} = \frac{3}{5},$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - x}{x^2 - 6x + 9} = +\infty,$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$

10. *Calcolare i seguenti limiti sfruttando lo sviluppo di Taylor delle funzioni interessate:*

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\sin(x^3)))}{x^6},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{3\sin(x)^2 + \sin(4x^2)},$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 5x + 6)}{1 - \cos(x - 3)}.$

#### 6.1.4 Mercoledì 14/12/11

##### 51-53. Altri risultati fondamentali da sapere

1. (Del confronto dei limiti). *Siano  $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale e sia  $\alpha$  un punto di accumulazione per  $A$ . Supponiamo  $f_1(x) \leq f_2(x)$  per ogni  $x \in A$ . Se, per  $x \rightarrow \alpha$ ,  $f_1(x) \rightarrow \gamma_1$  e  $f_2(x) \rightarrow \gamma_2$ , allora  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ .*

2. **Teorema** (senza dimostrazione, vedi anche il testo). *Sia  $f$  una funzione continua nell'intervallo  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lambda$  allora  $\lim_{h \rightarrow 0^+} (f(a+h) - f(a))/h = \lambda$*

Enunciare un teorema analogo al precedente per l'estremo destro.

Questo teorema è particolarmente utile per stabilire la derivabilità delle funzioni definite a tratti.

3. **(Teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone)**. Sia  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona definita in un intervallo  $(\alpha, \beta)$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono reali estesi. Allora esistono (nei reali estesi) i limiti per  $x \rightarrow \alpha$  e per  $x \rightarrow \beta$  di  $f(x)$ , e risulta

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \inf f \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \sup f$$

se  $f$  è crescente e

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \sup f \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \inf f$$

se  $f$  è decrescente.

**Dimostrazione (facoltativa)**. Proviamo il risultato nel caso speciale di  $f$  crescente e  $x \rightarrow \beta = +\infty$ . Gli altri casi si provano in modo analogo (i dettagli sono lasciati agli studenti). Si hanno due possibilità:  $\sup f < +\infty$  e  $\sup f = +\infty$ . Supponiamo prima che l'estremo superiore di  $f(x)$  sia finito e denotiamolo, per brevità, con la lettera  $\lambda$ . Fissiamo un arbitrario  $\epsilon > 0$ . Occorre trovare una semiretta  $(h, +\infty)$  in cui valga  $\lambda - \epsilon < f(x) < \lambda + \epsilon$ . Poiché (per definizione di estremo superiore)  $\lambda$  è il minimo maggiorante per  $f(x)$ , il numero  $\lambda - \epsilon$  non può essere un maggiorante per  $f(x)$ . Non è vero quindi che tutti i numeri  $f(x)$  verificano la condizione  $f(x) \leq \lambda - \epsilon$ . Ne esiste quindi (almeno) uno, denotiamolo  $f(\bar{x})$ , che non verifica tale condizione. Esiste cioè un  $\bar{x}$  per il quale risulta  $f(\bar{x}) > \lambda - \epsilon$ . Dato che abbiamo supposto  $f(x)$  crescente, se  $x$  è un qualunque numero maggiore di  $\bar{x}$ , si ha  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  e quindi, a maggior ragione,  $\lambda - \epsilon < f(x)$ . D'altra parte  $\lambda$  è un maggiorante per  $f(x)$  e, di conseguenza, per ogni  $x$  (e non solo per quelli maggiori di  $\bar{x}$ ) risulta  $f(x) \leq \lambda$ . In conclusione, possiamo affermare che per gli  $x > h := \bar{x}$  si ha  $\lambda - \epsilon < f(x) < \lambda + \epsilon$ , e quindi, per la definizione di limite,  $f(x) \rightarrow \lambda = \sup f$ .

Supponiamo ora  $\sup f = +\infty$  e fissiamo un  $k > 0$ . Poiché (in base al significato della notazione  $\sup f = +\infty$ ) la funzione non è limitata superiormente, il numero  $k$  non può essere maggiore o uguale di tutti gli  $f(x)$ . Esiste quindi un numero  $\bar{x}$  per il quale risulta  $f(\bar{x}) > k$  (ricordarsi del discorso sulle pecore, ma se non se ne vede il nesso, belare). Dato che la funzione è crescente, quando  $x > h := \bar{x}$  si ha  $f(x) > k$ . Dunque, per la definizione di limite,  $f(x) \rightarrow +\infty = \sup f$ .  $\square$

- Esercizi 6.1.4.** 1. Come applicazione del teorema (di esistenza) del limite per le funzioni monotone, dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \pi/2$ .

Svolgimento. Allo scopo ricordiamo che la funzione arcotangente è l'inversa della restrizione della tangente all'intervallo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Essendo la tangente, in tale intervallo, una funzione strettamente crescente, anche l'arcotangente risulta strettamente crescente. Di conseguenza, ricordandosi che l'immagine di una funzione inversa coincide col dominio della funzione che viene invertita, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \sup\{\arctan(x) : x \in \mathbb{R}\} = \sup(-\pi/2, \pi/2) = \pi/2.$$

2. Dal fatto che la funzione esponenziale (naturale) è l'inversa della funzione logaritmica (naturale), dedurre che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

3. Provare che la funzione definita da  $f(x) = \ln(x) + 2x^3$  è invertibile, studiarne la funzione inversa  $f^{-1}$  e disegnarne il grafico. In particolare determinarne dominio, immagine, crescenza, concavità ed eventuali asintoti.

Il  $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x)$  non è importante per lo studio di  $f^{-1}$ . Per quale motivo? Calcolarlo lo stesso, applicando un noto teorema.

4. Sia  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi(x) \geq 0$  per ogni  $x \in A$ . Dedurre, dal teorema del confronto dei limiti, che se  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $A$  e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \gamma \in \mathbb{R}^*,$$

allora  $\gamma \geq 0$ . Rispondere alla seguente domanda: se (ferme restando le altre ipotesi) si suppone  $\varphi(x) > 0$  per ogni  $x \in A$ , si può affermare che  $\gamma > 0$ ?

5. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Provare che se  $f$  è crescente, allora (necessariamente) risulta  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Suggerimento. Fissato un  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si osservi che il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è sempre maggiore o uguale a zero. Quindi, per il teorema del confronto dei limiti ..., completare la dimostrazione.

### Infinitesimi e infiniti.

**Definizione 6.1.9.** Se  $f(x)$  tende a zero per  $x \rightarrow \alpha$ , si dice che è infinitesima per  $x \rightarrow \alpha$  o che è un infinitesimo per  $x \rightarrow \alpha$  (quando risulta evidente dal contesto, la precisazione "per  $x \rightarrow \alpha$ " può venire omessa). In questo caso si scrive

$$f(x) = o(1), \quad x \rightarrow \alpha.$$

Si ricorda che se  $f$  è infinitesima in  $x_0 \in \mathbb{R}$  allora è anche infinitesima per  $x \rightarrow x_0$  e che se  $f$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ , allora è estendibile per continuità a  $x_0$  e la funzione estesa è infinitesima in  $x_0$ . In simboli si può affermare che

$$f(x) = \epsilon(x - x_0) \iff f(x) = o(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

**Definizione 6.1.10.** Se  $f(x)$  tende a  $\pm\infty$  per  $x \rightarrow \alpha$ , si dice che è un infinito per  $x \rightarrow \alpha$  (quando risulta evidente dal contesto, la precisazione "per  $x \rightarrow \alpha$ " può venire omessa).

### Esempi ed esercizi.

1. Il corollario nell' Esercizio 6.1.3 n.11 può essere enunciato anche così: *il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è una funzione infinitesima.*
2. La funzione definita da  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  è infinitesima per  $x \rightarrow 0$ . Infatti  $x^2 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  e  $\sin(1/x)$  è una funzione limitata. Si osservi che il teorema fondamentale per il calcolo dei limiti non è applicabile in questo caso perché  $\sin(1/x)$  non ammette limite per  $x \rightarrow 0$ .
3. La funzione  $x \mapsto 1/x$  è infinitesima per  $x \rightarrow \infty$ .
4. La funzione definita da  $f(x) = 1/(x - x_0)$  è infinita per  $x \rightarrow x_0^\pm$ .
5. La funzione definita da  $f(x) = x$  è infinita per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Definizione** (di infinitesimo di ordine inferiore, superiore, dello stesso ordine e di infinitesimo equivalente o asintotico, per  $x \rightarrow \alpha$ ), vedi testo.

**Esempio** Se  $f(x) = (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$  allora  $f$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $(x - x_0)^n$  per  $x \rightarrow x_0$ . In simboli:

$$f(x) = (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0) \implies f(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Inoltre se  $f(x) = o((x - x_0)^n)$  per  $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ , allora è estendibile per continuità a  $x_0$  e la funzione estesa è del tipo  $(x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$ .

**Lemma 6.1.1.** Siano  $f, \tilde{f}$  e  $g, \tilde{g}$  due coppie di infinitesimi equivalenti per  $x \rightarrow \alpha$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)},$$

dove la precedente uguaglianza significa anche che i due limiti o esistono entrambi o nessuno dei due esiste.

*Dimostrazione.* Basta osservare che, per  $x \neq \alpha$ ,  $f(x) = \tilde{f}(x) \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}$  e ..., completare la dimostrazione per esercizio.

**Definizione** (di infinito di ordine inferiore, superiore, dello stesso ordine e di infinito equivalente o asintotico), vedi testo.

**Esercizio da fare.** Formulare e dimostrare il lemma di sostituzione degli infiniti, analogo a quello per gli infinitesimi.

### 6.1.5 Giovedì 15/12/11

54-56.

**Definizione 6.1.11** (di infinitesimi di riferimento, per  $x \rightarrow \alpha$ ). Le seguenti funzioni infinitesime  $\varphi$  si dicono di riferimento

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \pm(x - x_0), & x \rightarrow x_0^\pm \\ \varphi(x) &= \pm 1/x, & x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Si osservi come gli infinitesimi di riferimento siano definitivamente positivi. Questa richiesta è giustificata dalla seguente definizione.

**Definizione 6.1.12** (di infinitesimi di ordine  $r > 0$ , per  $x \rightarrow \alpha$ ). Una funzione  $f$  si dice infinitesima di ordine  $r > 0$  per  $x \rightarrow \alpha$  se esiste  $l \neq 0$  in  $\mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(\varphi(x))^r} = l$$

**Definizione 6.1.13** (di infiniti di riferimento, per  $x \rightarrow \alpha$ ). Le seguenti funzioni infinite  $\psi$  si dicono di riferimento

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \pm 1/(x - x_0), & x \rightarrow x_0^\pm \\ \psi(x) &= \pm x, & x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Anche gli infiniti di riferimento sono definitivamente positivi e, in maniera analoga a quanto fatto sopra, si definiscono gli infiniti di ordine  $r > 0$ , per  $x \rightarrow \alpha$ .

**Esercizio da fare.** Dare la definizione per esercizio e poi consultare il testo.

#### Esempi

1. Formulare i limiti notevoli in termini di infiniti (o infinitesimi) di ordine superiore e inferiore e dedurre che alcune funzioni (quali?) non hanno ordine.
2. Per  $x \mapsto +\infty$  :  $3x^4 + 4x^3$  è un infinito di ordine 4,  $\sin(3/x)$  è un infinitesimo di ordine 1,  $\sqrt{3x+4}$  è un infinito di ordine 1/2,  $\exp(x)$  e  $\ln(x)$  sono infiniti che non hanno ordine.
3. Per  $x \mapsto 0$  :  $\ln(x)$  è un infinito che non ha ordine,  $\cos(x) - 1$  è un infinitesimo di ordine 2,  $\sqrt[3]{3x}$  è un infinitesimo di ordine 3/2.

**Definizione di parte principale, per  $x \rightarrow \alpha$ .** Sia  $\alpha$  di accumulazione per il dominio della funzione  $f$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l \neq 0$  e sia  $\varphi$  l'infinitesimo di riferimento per  $x \rightarrow \alpha$ . Si dice che  $\ell \varphi(x)^r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , è la parte principale di  $f$  per  $x \rightarrow \alpha$  se  $f(x) \sim \ell \varphi(x)^r$ , per  $x \rightarrow \alpha$ .

**Osservazioni.**

- La parte principale può non esistere.
- Se  $r > 0$ ,  $f$  è infinitesima, se  $r < 0$ ,  $f$  è infinita, se  $r = 0$ ,  $f$  è equivalente ad una costante.
- Se una funzione ha parte principale non costante, ha anche ordine (come infinitesimo o infinito). Viceversa se una funzione ha ordine (come infinitesimo o infinito), allora ha anche parte principale.
- Se  $f \in C^\infty$  in un intorno di  $x_0$  ed ha parte principale per  $x \rightarrow x_0$ , allora la sua parte principale è il primo termine non nullo di ogni polinomio (non nullo) di Taylor centrato in  $x_0$ . Si noti che  $\exp(-1/x^2)$  (estesa per continuità a 0) è una funzione  $C^\infty$  che ha tutte le derivate in 0 uguali a 0 e quindi non ha parte principale per  $x \rightarrow 0$ . Si dimostri per **esercizio** la precedente affermazione.  
*Suggerimento.* Notare che ogni derivata di  $f$  è il prodotto di  $f$  per una funzione razionale e poi usare il cambiamento di variabile  $y = -1/x^2$ .
- Se  $f$  è continua in  $x_0$ ,  $(f(x) - f(x_0))$  è infinitesima in  $x_0$ , la sua parte principale, quando esiste, esprime la maniera di andare a 0 dell'incremento, determina l'andamento del grafico vicino a  $x_0$  e quindi indica se ci sono massimi o minimi locali e flessi a tangente orizzontale.

**Esercizio da fare.** Consultare sul testo *l'algebra degli "o piccolo"* e confrontarla con le regole di calcolo per le funzioni di tipo  $\epsilon(x)$  nel Lemma 5.1.1.

**Definizione 6.1.14** (di asintoto obliquo). *La retta  $y = mx + q$  (con  $m \neq 0$ ) si dice asintoto obliquo destro per il grafico della funzione  $f$  (o anche per  $f$ ) se*

$$f(x) = mx + q + o(1) \quad x \rightarrow +\infty \quad \iff \quad f(x) \sim mx + q \quad x \rightarrow +\infty$$

Analogha definizione vale per gli asintoti obliqui sinistri.

**Esercizi 6.1.5.** 1. Fare gli esercizi sui confronti asintotici nella Sezione 2.5.2 del file degli esercizi.

2. Disegnare il grafico della funzione definita da  $f(x) = (1 + 1/x)^x$ , (inclusi gli andamenti asintotici all'infinito).

3. Studiare la funzione  $f(x) = \ln(|x| + e^x)$  (inclusi gli andamenti asintotici all'infinito).

4. Studiare (utilizzando il polinomio di Taylor) i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{\ln(\cos(x))}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 - (\sin(x))^2 + 1)}{e^{x^2} - 1 - x^2}.$$

5. Studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - e^x + \frac{1}{2}x}{x^2 \cos(x) + x^3}.$$

6. Studiare (qualitativamente) la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{3x + 2}.$$

7. Fare gli esercizi dei Capitoli 1 e 2 del file degli esercizi.

8. Usando la Definizione 6.1.14, verificare che  $y = mx + q$  è un asintoto obliquo destro per  $f$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - q) = 0.$$

Determinare analoghe condizioni per gli asintoti obliqui sinistri.

9. Determinare eventuali asintoti obliqui per le funzioni fin qui studiate.
10. Dominio e grafico delle funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\arcsin(x)) & f(x) &= \arcsin(\sin(x)) \\ f(x) &= \tan(\arctan(x)) & f(x) &= \arctan(\tan(x)). \end{aligned}$$

11. Studiare la cubica e le sue radici

12. Data la funzione definita da  $f(x) = \frac{(x-8)^2 - 1}{(x+4)^2}$ , usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e il segno della funzione. Dedurre anche l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

13. Studiare al variare del parametro  $h \in \mathbb{R}$  il grafico della funzione

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 2hx^2 + 3$$

### 6.1.6 Mercoledì 21/12/11

**57-59.** Esercizi di ricapitolazione.