

**Domanda 1)**

1. Sia  $f$  una funzione convessa e  $C^1$  sull'intervallo  $(5, 8)$ . Dare la condizione di convessità di  $f$  in termini di proprietà delle rette tangenti al grafico. Usare la condizione per dimostrare che se esiste  $x_0 \in (5, 8)$  tale che  $f'(x_0) = 0$ , allora  $f(x_0)$  è il minimo globale della funzione.
2. Della funzione  $f$  definita da

$$f(x) = (x - 5)^{\sqrt{8-x}}$$

determinare dominio, continuità ed eventuali asintoti orizzontali e verticali. Inoltre calcolare, dove esiste,  $f'$  e determinare eventuali punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale di  $f$ .

3. Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da

$$f(x) = \frac{(x^2 - 16)}{(x + 8)^2}$$

- (a) Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

- (b) Usare le proprietà delle funzioni continue ed il punto precedente per determinare il segno della funzione.

- (c) Disegnare il grafico della funzione.

- (d) Determinare numero e segno delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = c$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

4. Determinare, se esiste, la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della funzione

$$x \mapsto f(x) = -\sin(x^{24}) + \exp(x^{24}) - \cos(x^{24}).$$

La funzione ha ordine per  $x \rightarrow 0$ ? Se sì, determinarlo. Stabilire qual è la prima derivata non nulla in  $x_0 = 0$  di  $f$  e determinarne il valore. Stabilire se la funzione ha in  $x_0 = 0$  un massimo o un minimo locale.

5. Disegnare il grafico della funzione definita da  $f(x) = \frac{2x}{(x-3)(x-4)}$ , specificando dominio, eventuali asintoti verticali e orizzontali, eventuali massimi e minimi locali e globali. Per quali  $n \in \mathbb{N}$  posso scrivere  $f \in C^n([7, +\infty))$ ?

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.