–

– Esercizi sulle funzioni di piu' variabili – 26 / 4 / 2010

– Compito n. **1**

Domanda 1)

1. Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili ed applicarlo per determinare il dominio ed il segno della funzione definita da
$$g(x,y) = \ln(|4x+3y| - x^2 - y^2)$$
Illustrare il risultato con un disegno

2. Determinare i punti $P \equiv (x_0, y_0)$ del dominio di g per i quali la linea di livello $g(x,y) = g(x_0, y_0)$ definisce localmente una funzione implicita del tipo $y = \phi(x)$ o $x = \psi(y)$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)
Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare il dominio della funzione definita da: $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}\right)^{xy}$ e disegnarlo.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)
Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare il dominio della funzione definita da: $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2x-(x^2+y^2)}{x^2+y^2-x}}$ e disegnarlo.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

1. Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili ed applicarlo per determinare il dominio ed il segno della funzione definita da $g(x,y) = \ln((x-y)(x-3))$. Illustrare il risultato con un disegno.

2. Disegnare le linee di livello di g.

3. Determinare eventuali estremi locali liberi per g.

4. Discutere l'esistenza di massimi e minimi di g vincolati al cerchio di centro $C \equiv (3,3)$ e raggio 3. Può risultare utile l'uso delle coordinate polari centrate in C.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)
Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili ed applicarlo per determinare il segno della funzione definita da
$$g(x,y) = |2x+18y| - x^2 - 9y^2$$
Illustrare il risultato con un disegno
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ la cui derivata si annulla solo in $x_0 = 9$. Definiamo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante
$$F(x,y) = f(3x+5y) - f(3x-5y)$$

1. Determinare il gradiente e la matrice Hessiana di F mediante le derivate di f.

2. Discutere l'esistenza di punti di massimo e minimo locale per F.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 7)
Sia $\gamma : t \mapsto (5t^2\,,\, e^t)$ e $f : (x,y) \mapsto \ln(xy + 6y^2)$.

1. Determinare il dominio di γ, f, $\gamma \circ f$ e $f \circ \gamma$ e disegnarli.

2. Enunciare la regola della derivazione composta ed applicarla al calcolo di $D(\gamma \circ f)(-1,-2)$ e $D(f \circ \gamma)(1)$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 8)

Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Verificare che la funzione $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non ha un'inversa C^∞. Suggerimento: calcolare lo Jacobiano della funzione in oggetto.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 9)

1. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto P sia di minimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto P sia di minimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
3. Sia f la funzione definita da $f(x,y) = e^{3y} + 9e^{xy} + 6x^2$. Determinare l'approssimazione di McLaurin del quarto ordine di f e dedurne (qualora sia possibile) se l'origine è un punto di estremo locale per la funzione e se la funzione è localmente concava o convessa. Dedurre inoltre se l'insieme di livello $f(x,y) = f(0,0)$ definisce, in un intorno dell'origine, una linea di livello e, in caso affermativo, determinarne la retta tangente.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 10)

1. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto P sia di massimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto P sia di massimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
3. Sia f la funzione definita da $f(x,y) = 4e^{xy} + 12x^2$. Determinare l'approssimazione di McLaurin del quarto ordine di f e dedurne (qualora sia possibile) se l'origine è un punto di estremo locale per la funzione. In caso affermativo specificare se si tratta di un punto di massimo o di minimo.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 11)

Data la funzione definita da $f(x,y,z) = (x+7)^{2yz}$

1. Determinarne il dominio.
2. Determinarne il polinomio di McLaurin di ordine 4.
3. Dedurre dal punto precedente (se possibile) se l'origine è un punto di estremo locale
4. Dedurre dal punto secondo se l'origine è un punto in cui all'insieme di livello $f(x,y,z) = 1$ si puó applicare il teorema della funzione implicita.
5. Determinare in quali punti all'insieme di livello $f(x,y,z) = 1$ non si puó applicare il teorema della funzione implicita.
6. Studiare, per quanto possibile, l'insieme di livello $f(x,y,z) = 1$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 12)

Della funzione, definita da $f(x,y,z) = \sin(2z + 6xy) + \exp(3x - 4y)$, determinare il polinomio di McLaurin di ordine tre e dedurne gradiente e matrice Hessiana nell'origine. L'origine è un punto di estremo locale per f? A partire dalla matrice Hessiana nell'origine, cosa è possibile dire sulla convessità o concavità di f in un intorno dell'origine?

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 13)

1. Determinare l'approssimazione di Taylor del secondo ordine centrata nell'origine della funzione definita da
$$f(x,y) = \sqrt{1 + 3y + 7xy} + \cos(2x) - \frac{3}{2}y$$
2. Dedurre dal precedente punto, se possibile, se l'origine è un punto di estremo locale per f. In caso affermativo determinare se è di massimo o di minimo.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 14)
Determinare massimi e minimi relativi della funzione definita da: $f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + (x^2-1)y^2$
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 15)

1. Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili.
2. Applicare il precedente teorema per determinare l'insieme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |2x+2y| - x^2 - y^2 \geq 0\}$$
e disegnarlo
3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x + y - 2$. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.
4. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 16)
Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 6x - 2y + 1$ e sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 8x + 4y - x^2 - y^2 \leq 0\}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

1. f ha massimo vincolato a D
2. f ha minimo ma non ha massimo vincolato a D.
3. f vincolata a D non ha minimo
4. f vincolata a D raggiunge il massimo sulla circonferenza $x^2 + y^2 - 8x - 4y$

Domanda 17)

1. Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili.
2. Applicare il precedente teorema per determinare e disegnare l'insieme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |3x+2y| \leq 4\,,\ |x| \leq 2\}$$
3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.
4. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 18)

1. Determinare l'insieme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \leq 5,\ |x-y| \leq 4\}$$
e disegnarlo.
2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 10x.$$
Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.
3. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 19)

1. Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare l'insieme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |2-x| \leq 1\,,\ |4+y| \leq 2\}$$
e disegnarlo.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+4y^2+1}$. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.

3. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D.

4. Usare le proprietà delle funzioni continue su $\mathbb{R}^2$ per determinare l'immagine di D mediante f.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 20)
Dopo aver enunciato il teorema di esistenza di una funzione implicita in $\mathbb{R}^2$ del tipo $y = \phi(x)$, verificare che l'equazione $3x + \sin(y) + 2xy = 0$, definisce una funzione implicita in $P \equiv (0,0)$ del tipo indicato. Determinare l'approssimazione del secondo ordine di tale funzione e dedurne il grafico locale.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 21)
Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da $f(x,y) = \sqrt{\ln(4y^2+x)}$.

1. Determinare e disegnare il dominio di f.

2. Verificare che il punto $P \equiv (0,-2)$ appartiene al dominio di f.

3. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $Q \equiv (P, f(P))$.

4. Determinare l'equazione della retta tangente in P alla curva di livello $f(x,y) = f(P)$.

5. Determinare la derivata di f in $P_1 \equiv (1,1)$ in direzione del versore $\bar{v} = (1/\sqrt{5}\,,\, 2/\sqrt{5})$.

6. Determinare in quali punti del dominio di f il grafico di f è ortogonale al vettore $\bar{w} = (a, b, -1)$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 22)
Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da $f(x,y) = 2x^2y + 3y^3e^x$.

1. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $Q \equiv (0, -3, f(0,-3))$.

2. Determinare l'equazione della retta tangente in $P \equiv (0,-3)$ alla curva di livello $f(x,y) = f(P)$.

3. Determinare la derivata di f in $P_1 \equiv (1,2)$ in direzione del versore $\bar{v} = (1/\sqrt{2}\,,\, 2/\sqrt{2})$.

4. Quale è l'approssimazione di McLaurin di ordine due di f? Si può dedurre da essa se l'origine è un punto di estremo relativo per f? Si può dedurre con altre considerazioni se l'origine è un punto di estremo relativo per f?

5. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f sull'insieme D definito da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2,\ |y| \le 3\}$$

   Determinare massimo e minimo di $f_{|D}$ e disegnare D e i punti di massimo e minimo.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 23)

1. Interpretare il grafico di una funzione di una variabile come il sostegno di una curva parametrizzata e descrivere la relazione fra retta tangente al grafico della funzione e vettore tangente alla curva.

2. Usare il teorema di Lagrange per dimostrare che una funzione di due variabili definita in un aperto connesso per archi e con derivate parziali nulle è costante.

3. Usare il precedente teorema per determinare un insieme aperto del piano in cui vale l'identità

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.