– Esercizi sulle EDO – 26 / 4 / 2012

–

Compito n. **1**

Domanda 1)

Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro $h > 0$.

$$\begin{cases} y'' + 2hy' + h^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di $h > 0$, la soluzione ϕ_h di tale problema specificando il dominio.
2. Determinare per quali valori di $h > 0$ esiste almeno un $x_0 > 0$ tale che $\phi_h(x_0) = 10$
3. **Facoltativo** Disegnare, al variare di $h > 0$ il grafico di ϕ_h

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro h.

$$\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = h \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di h, la soluzione ϕ_h di tale problema specificando il dominio.
2. Determinare per quali valori di h esiste almeno un $x_0 > 0$ tale che $\phi_h(x_0) = 10$
3. **Facoltativo** Disegnare, al variare di $h > 0$ il grafico di ϕ_h

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = h \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di h, la soluzione ϕ_h di tale problema specificando il dominio.
2. Determinare per quali valori di h esiste almeno un $x_0 > 0$ tale che $\phi_h(x_0) = -4$
3. Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, le eventuali soluzioni della precedente EDO con condizioni
$$y(x_0) = -1\,, \quad y'(\frac{1}{2}) = b$$
4. Disegnare, al variare di $h > 0$ il grafico di ϕ_h

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

Data l'equazione differenziale $y'' + 9y = 6\cos(3x)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. L'equazione ha soluzioni limitate, illimitate, periodiche?
2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico che passa per il punto $P \equiv (0, -4)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = -4 + 3x$
4. Studiare al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione il cui grafico passa per l'origine e per il punto $P \equiv (a, b)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)
Assegnato $\epsilon \in \mathbb{R}$, rispondere alle seguenti domande sull'equazione differenziale $y'' - \epsilon y' + y = \sin(x)$.

1. Determinare al variare di $\epsilon \in [0,2]$, le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare al variare di $\epsilon \in (0,2)$, le soluzioni dell'equazione.
3. Determinare al variare di $\epsilon \in [0,2]$, le soluzioni dell'equazione.
4. Determinare al variare di $\epsilon \in (0,2)$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
5. Determinare al variare di $\epsilon \in [0,2]$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
6. Determinare per $\epsilon = 0$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
7. Determinare per $\epsilon = 1$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
8. Determinare per $\epsilon = 2$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
9. Determinare per $\epsilon = 4$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)
Data l'equazione differenziale $y'' + 4y = -4\cos(2x)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. L'equazione ha soluzioni limitate, illimitate, periodiche?
2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico passa per il punto $P \equiv (0, -1)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = -1 + 3x$.
4. Studiare al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione il cui grafico passa per l'origine e per il punto $P \equiv (a, b)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 7)
Data l'equazione differenziale $y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$ sulla semiretta $(0, +\infty)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. Determinare per quali valori di $q \in \mathbb{R}$ la funzione $y = x^q$ è soluzione dell'equazione differenziale.
2. Usando i risultati del punto precedente, determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione il cui grafico passa per il punto $P \equiv (1, 5)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = 5 + 2(x - 1)$
4. Determinare, se esiste, la soluzione dell'equazione il cui grafico passa per i punti $P \equiv (1, 5)$ e $Q \equiv (2, 2)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 8)
Rispondere alle seguenti domande sull'equazione differenziale lineare del secondo ordine: $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{4}{x^2}y = x$

1. Verificare che le funzioni definite da $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^2\ln(x)$ sono soluzioni, sulla semiretta $I = (0, +\infty)$, dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare la soluzione generale, su I, dell'equazione omogenea associata.
3. Usando il metodo di variazione delle costanti, determinare la soluzione generale, su I, dell'equazione non omogenea.
4. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente in $P \equiv (1, 3)$ alla retta $y = 3$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale in P.
5. Determinare, se esiste, la soluzione dell'equazione il cui grafico passa per i punti $P \equiv (1, 3)$ e $Q \equiv (3, 3)$. Posso affermare che tale soluzione ha un punto in cui si annulla la derivata?

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.