Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica I
Registro delle lezioni del secondo semestre
A.A 2009/2010

Gianna Stefani

Indice

Capitolo 1

Introduzione

In questo file sono riportati gli argomenti delle lezioni del secondo semestre, cioè le lezioni sull'integrale di Riemann, sulle equazioni differenziali lineari e sul calcolo differenziale delle funzioni reali di piu' variabili reali.

Il file è organizzato in maniera analoga a quello del semestre precedente.

1.1 Testo di riferimento

Contiene tutti gli argomenti del corso.

- Bertsch - Dal Passo - Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw-Hill.

Si può usare un qualsiasi testo di Analisi Matematica, usando il registro delle lezioni come indice degli argomenti.

Capitolo 2

Integrale di Riemann

L'argomento viene trattato seguendo prevalentemente il testo di riferimento. Due sono i punti in cui l'esposizione si discosta leggermente.

- Relazione fra integrale ed area: viene dato maggior rilievo all'argomento, mediante definizioni precise e lemmi (senza dimostrazione). Sul testo l'argomento viene trattato in maniera piu' discorsiva.

- Teorema fondamentale del calcolo: viene enunciato sotto diverse ipotesi e se ne sottolineano le relative relazioni e quelle con l'enunciato del testo.

Se il modo di trattare l'argomento è analogo a quello del libro, viene riportato solo l'argomento.

2.1 Settimana 22-27/02/10. Par. 9.1–9.4.

2.1.1 Mercoledí 24/02/10

1-3. Il concetto di area di figure piane.

Definizione 2.1.1. *Sia $\mathcal{C}$ una parte del piano limitata (cioè contenuta in un cerchio con centro l'origine). $\mathcal{C}$ si dice misurabile secondo Riemann se l'estremo superiore dell'insieme delle aree dei poligoni contenuti in $\mathcal{C}$ coincide con l'estremo inferiore dell'insieme delle aree dei poligoni contenenti $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ è misurabile, l'estremo superiore delle aree dei poligoni contenuti (o equivalentemente l'estremo inferiore delle aree dei poligoni contenenti) si dice* area *di $\mathcal{C}$.*

Osservazione. L'area è un numero positivo o nullo. Nello studio dell'analisi viene sottintesa l'unità di misura.

Lemma 2.1.1 (senza dimostrazione)**.** *$\mathcal{C}$ è misurabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un poligono $\mathcal{P}$ che contiene $\mathcal{C}$ ed un poligono $\mathcal{Q}$ contenuto in $\mathcal{C}$ tali che l'area di $\mathcal{P}$ meno l'area di $\mathcal{Q}$ è minore o uguale di ϵ.*

Osservazione. Il lemma precedente è una diretta conseguenza della definizione di estremo superiore e inferiore.

Argomenti da vedere sul testo.

1. Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato.

2. Somma inferiore e superiore associata ad una partizione per una funzione limitata su un intervallo limitato. disuguglianze legate alle partizioni.

3. Il caso delle funzioni positive: relazione fra somme superiori (inferiori) e area dei plurirettangoli circoscritti (iscritti) al grafico di una funzione.
4. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato. Esempi: funzioni costanti, funzione segno, funzione di Dirichlet.
5. Criterio di integrabilità basato sulla differenza fra somma inferiore e superiore associate ad una stessa partizione (senza dimostrazione).

Relazione fra integrale e area per funzioni non negative:

Lemma 2.1.2 (senza dimostrazione)**.** *Se f è una funzione non negativa e integrabile su $[a,b]$, allora $\int_{[a,b]} f$ è l'area della parte di piano $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a,b)$ e $0 \le y \le f(x)\}$, cioè della parte di piano delimitata dal grafico della funzione, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$. $\mathcal{C}$ è anche detta trapezoide associato ad f su $[a,b]$.*

Argomenti da vedere sul testo.

1. **Lemma** (senza dimostrazione). L'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un **numero finito** di valori.
2. Notazione $\mathcal{R}(a,b)$.
3. Classi di funzioni integrabili su un intervallo limitato (senza dimostrazione):
   - funzioni limitate e monotone,
   - funzioni continue sull'intervallo chiuso,
   - funzioni limitate e continue eccetto un numero finito di punti, esempio: la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0,1]$ estesa con qualunque valore a 0.
4. Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione):
   - Linearità dell'integrale (proprietà *(i)* del teorema 9.5): l'insieme $\mathcal{R}(a,b)$ delle funzioni integrabili su $[a,b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f \in \mathcal{R}(a,b) \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ è lineare.
   - Additività rispetto all'intervallo (proprietà *(iii)* del teorema 9.5).
   - Monotonia (proprietà *(ii)* del teorema 9.5).
   - Continuità (proprietà *(iv)* del teorema 9.5): definizione delle funzioni f^+, f^-, loro relazione con f e $|f|$; relazione fra integrale ed area per funzioni generiche tramite l'uguaglianza $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f^+ - \int_{[a,b]} f^-$.

Esercizi 2.1.1. *Usando la relazione fra integrale ed area e le proprietà dell'integrale, calcolare i seguenti integrali*

1. $\displaystyle\int_{[-2,1]} x\,dx$. Svolgimento. *Applicando le precedenti proprieta' (quali?) si ottiene:* $\displaystyle\int_{[-2,1]} x\,dx = -\int_{[-2,0]} -x\,dx + \int_{[0,1]} x\,dx$*, quindi per la relazione fra integrale ed area si ottiene che l'integrale vale* $-4/2 + 1/2 = -3/2$

2. $\displaystyle\int_{[-1,1]} 5\sqrt{1-x^2}\,dx$. Svolgimento. *Applicando le precedenti proprieta' (quali?) si ottiene:* $\displaystyle\int_{[-1,1]} 5\sqrt{1-x^2}\,dx = 5\int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Il grafico $y = \sqrt{1-x^2}$ rappresenta una semicirconferenza di raggio 1 contenuta nel semipiano positivo delle ordinate, quindi per la relazione fra integrale ed area si ottiene che l'integrale vale $5\pi/2$

3. *Data lafunzione definita da* $f\colon x \in [0,3] \mapsto \begin{cases} -4x & x \in [0,1] \\ \sqrt{3-x^2+2x} & x \in (1,3]\,, \end{cases}$ *determinare* $\displaystyle\int_{[0,3]} f(x)\,dx$. Svolgimento: *si riportano solo i principali passaggi che lo studente è tenuto a giustificare, si consiglia di disegnare il grafico della funzione.*
$\displaystyle\int_{[0,3]} f(x)\,dx = -4\int_{[0,1]} x\,dx + \int_{[1,3]} \sqrt{3-x^2+2x}\,dx = -4/2 + \pi/4 = \pi/4 - 2.$

2.1.2 Venerdì 26/02/10

4-5. Argomenti da vedere sul testo.

1. Teorema della media integrale (teorema 9.6 del testo) con dimostrazione. Particolare attenzione va posta alla formulazione e alla dimostrazione del caso di funzioni continue.

2. Integrale orientato: definizione.

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & a < b \\ 0 & a = b \\ -\int_{[b,a]} f & a > b \end{cases}$$

Esercizio . Determinare quali delle precedenti proprietà dell'integrale di Riemann si estendono all'integrale orientato, in particolare si verifichi che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a, b, c \in I$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3. Funzioni integrali: definizione e loro continuità. Estensione al caso di funzioni definite su intervalli, vedi il seguente Lemma 2.1.3

Lemma 2.1.3. *Sia I un intervallo (**qualsiasi anche illimitato**), $c \in I$ e sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni intervallo $[a,b] \subset I$. Allora la funzione $F_c : x \in I \mapsto \int_c^x f(t)dt$ è continua in I. Inoltre se $c, d \in I$ allora $F_c(x) = F_d(x) + \int_c^d f(t)dt$.*

Dimostrazione. La prima cosa da osservare è che la funzione è definita su I. Infatti comunque si scelga $x \in I$, esistono $a, b \in I$ tali che $c, x \in [a,b]$. Per dimostrare la continuità in x, si consideri $x+h \in I$; definitivamente per $h \to 0$, esisteranno $a, b \in I$ tali che $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Quindi esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a,b]$, ne segue, come applicazione del teorema della media integrale, che

$$|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|\,.$$

La funzione è continua in x e quindi in I (si veda anche la spiegazione a pag 233 del testo). La seconda parte segue dalla proprietà di additività dell'integrale orientato e si lascia per esercizio al lettore.

4. Teorema fondamentale del calcolo nella formulazione del teorema 9.7 del testo (dimostrazione solo nel caso di funzioni continue nell'intervallo, si veda il successivo Teorema 2.1.1).

5. Estensione del teorema fondamentale del calcolo a funzioni f definite su un intervallo I con la proprietà che $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni intervallo $[a,b] \subset I$. In particolare quando f è continua su I.

6. Formula fondamentale del calcolo integrale (corollario 9.1 del testo), con dimostrazione.

Teorema 2.1.1. *Sia I un intervallo (**qualsiasi anche illimitato**), sia $f \in C^0(I)$ e sia $c \in I$. La funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ è una primitiva di f su I. Cioè $F \in C^1(I)$ e $F' = f$ su I.*

Dimostrazione. Vedi testo: è una semplificazione del teorema 9.7 del testo. Per il calcolo del rapporto incrementale si usa il teorema della media integrale per le funzioni continue. Riportiamo i passaggi fondamentali che semplificano la dimostrazione del testo.
Siano $x, x+h \in I$, usando l'additività dell'integrale e il teorema della media integrale per funzioni continue si ha che esiste un punto $\theta(h)$ nell'intervallo di estremi x e $x+h$ tale che

$$(F(x+h) - F(x))/h = f(\theta(h)).$$

Applicando il teorema "dei carabinieri" alla funzione $\theta : h \mapsto \theta(h)$, si ottiene che $\lim_{h\to o} \theta(h) = x$; poiché f è continua, si ha

$$\lim_{h\to 0} f(\theta(h)) = f(\lim_{h\to 0} \theta(h)) = f(x).$$

Esercizi 2.1.2. *1. Calcolare il dominio e disegnare il grafico delle funzioni definite da*

$$F : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad G : x \mapsto \int_{-1}^x \frac{1}{t}dt.$$

Inoltre, usando la relazione fra integrale e area e la definizione di integrale orientato, provare che $G(x) = F(-x)$. Suggerimento: *osservare che $t \mapsto 1/t$ è dispari e distinguere i casi $x < -1$ e $x \in (-1, 0)$.*

*2. **Usando la definizione e le proprietà dell'integrale stabilire la relazione fra integrale orientato e area**. Applicare questa relazione per risolvere il seguente problema: date*

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

calcolare $\int_{-r}^r f_1(x)dx$ *e* $\int_{-r}^r f_2(x)dx.$

3. Data la funzione $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, considerare la funzione $F : x \in [-r, r] \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Usando il teorema fondamentale del calcolo disegnare il grafico di F.
Usando la relazione fra integrale e area calcolare $F(x)$ e controllare il risultato usando la formula fondamentale del calcolo.
Detta $A(s)$ l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, l'asse y e la retta $x = s$, disegnare il grafico della funzione A, calcolarla e descrivere la relazione fra la funzione F e la funzione A.
Risposta. Per $x \in [0, r]$, $F(x) = \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}$.
$A(x) = |F(x)|$

4. Data la funzione $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, determinare il grafico della funzione F definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$. Determinare l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione f l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$. Inoltre, usando la relazione fra integrale ed area calcolare:

(a) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ *R.* $\pi/2$

(b) $F(x)$ *al variare di* x *nel dominio di* F.

Risposta. $\begin{cases} \frac{x^2+2x}{2} & se\ x \le 0 \\ \frac{\arccos(1-x)-(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2} & se\ x \in [0,2] \end{cases}$

5. *Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera. La funzione parte intera è definita da*

$$x \mapsto n \text{ se } x \in [n, n+1) \; n \in \mathbb{Z}.$$

2.2 1-10/03/10. Par. 9.5–9.7.

2.2.1 Mercoledi' 03/02/10. Lezioni tenute dal Dott.Bussoli

6-8. Argomenti ed esercizi.

1. Relazione tra integrale orientato e area; integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale orientato.

2. Calcolo dell'area di parte del cerchio con lo studio della funzione integrale

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$$

3. Calcolare i seguenti integrali orientati usando l'integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale di Riemann

$$\int_1^0 x(x-1)\sin(4\pi x)\,dx\,,\quad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx\,,\quad \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

4. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si possono calcolare i seguenti integrali (in senso classico) e calcolarli

$$\int_a^b \ln(x)\,dx\,,\ \int_a^b \ln|x|\,dx \quad \int_a^b \arctan(x)\,dx$$

5. Fare lo stesso con

$$\int_a^b \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx,$$

calcolandolo poi tra due valori determinati di a e b tra quelli possibili, ad esempio $a = -3$ e $b = -2$; poi fare lo stesso con

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+x+1}\,dx,$$

con $a = 0$ e $b = 1$.

6. Come determinare mediante l'integrale l'area della parte di piano compresa fra il grafico di due funzioni.
Lemma (senza dimostrazione) Siano $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ e sia $\mathcal{C}$ la parte del piano limitata dai grafici delle funzioni f, g e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$. Allora l'area di $\mathcal{C}$ è data da

$$\int_a^b (f-g)^+(x)\,dx + \int_a^b (f-g)^-(x)\,dx = \int_a^b |f-g|(x)\,dx$$

7. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \frac{\pi}{2}x$.

8. Calcolare la funzione integrale $F : x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)dt$, dove $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ 3 + x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$,

9. Studio di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt$, mediante la composizione di β con una funzione integrale: dominio e derivata (con la regola della catena).

10. Fare studio e grafico qualitativo della funzione integrale
$$G:\ x \mapsto \int_1^{1/x^2} \ln(t)dt.$$

11. Fare studio e grafico qualitativo della funzione integrale
$$G:\ x \mapsto \int_0^{\frac{1}{|x|+1}} e^{t^2}dt.$$

12. Cenni sullo studio di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$, con l'esempio di
$$G:\ x \mapsto \int_{2x+1}^{\sin x} (2t^2 - 5t + 6)\,dt.$$

2.2.2 Venerdì 05/03/10. Par. 9.7

9-10 Argomenti da vedere sul testo.

1. Integrali impropri e integrabilità in senso improprio come limiti di funzioni integrali.
2. Integrale improprio degli infiniti e infinitesimi di riferimento $1/x^r$ e loro interpretazione geometrica in termini di aree.
3. Assoluta integrabilità in senso improprio e relazione fra integrabilità e assoluta integrabilità in senso improprio.
4. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni positive: criterio del confronto, del confronto asintotico e criterio del confronto per funzioni $f(x) = o(g(x))$.

Esercizi 2.2.1. *1. Calcolare $\int_a^b f(x)dx$, dove f è una delle seguenti funzioni e a, b sono coppie di numeri naturali scelte dallo studente (fra quelle possibili).*
$$x \mapsto \frac{3x^3 + x + 1}{x + 1}, \quad \frac{x}{hx^2 + 1}, \ h \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{hx^2 + 1}, \ h \in \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{x + 3}{(x + 1)^2}.$$

2. Delle funzioni $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^{1} \arcsin(t)\,dt$ determinare dominio e derivata.

3. Integrabilità impropria della funzione di Gauss (gaussiana) $x \mapsto e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$.

4. Fare tutti gli eserci del testo sugli integrali (relativi alla parte svolta per quanto riguarda i metodi di integrazione)

5. Fare gli esercizi sugli integrali del file degli esercizi.

2.2.3 Mercoledí 10/03/10. Lezioni tenute dal Dott.Bussoli

11–13. Esercizi fatti o proposti.

1. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

2. Esercizio da fare a casa (poi da correggere assieme): calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = \arctan(x)$ ed $y = \frac{\pi}{4}x$.

3. Fare uno studio qualitativo di $G: \ x \mapsto \int_0^{\cos x} \arcsin(t)\,dt$: dominio, derivata, grafico (qualitativo), descrizione di G in termini di aree.

4. Esercizio da fare a casa (poi da correggere assieme): calcolare esplicitamente la $G(x)$ dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale.

5. Data
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{x^3} & \text{se } x \le -2 \\ \arctan(x) & \text{se } x > -2 \end{cases},$$
studiare $F(x) = \int_{-7}^{x} f(t)\,dt$, facendo il grafico di f e poi quello di F; trovare anche gli asintoti di F, e descrivere F in termini di aree.

6. Esercizio da fare a casa (poi da correggere assieme): calcolare esplicitamente la $F(x)$ dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale, in particolare calcolare $F(-2)$ e $F(1)$.

7. Data
$$f(x) = \frac{1 + x^5}{\ln(x)},$$
studiare $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt$, vederne gli asintoti e dove puó essere estesa per continuitá.

8. Esercizio da fare a casa (poi da correggere assieme): data $f : [0; 4] \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 5 & \text{se } x = 1, x = 4 \\ \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases},$$
calcolare $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; in particolare calcolare $F(4)$.

9. Studiare l'integrabilitá in senso improprio di
$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{1}{|x - x_0|^r}\,dx, \ a > 0,$$
con la sostituzione $x - x_0 = h$; esempio: $\int_1^3 \frac{1}{|x-2|}\,dx$;
$$\text{lo stesso con } \int_a^{+\infty} \frac{1}{|x - x_0|^r}\,dx, \ a > x_0;$$
$$\text{lo stesso con } \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{|x - x_0|^r}\,dx, \ a < x_0;$$
$$\text{usare questo nello studio di } F : x \mapsto \int_1^x \frac{t^3 + 1}{t^2 \cdot \sqrt[3]{7 - t}}\,dt$$

10. Vedere l'esistenza dei seguenti integrali impropri con lo studio asintotico della funzione integranda e, nel caso l'integrale converga, calcolarlo quando é possibile:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx,\ \int_0^1 \frac{x}{1-x^3}\,dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}\,dx, \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx.$$

11. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|^\beta}{x^2}\,dx$$

12. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}\,dx.$$

13. Studiare $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ e, di conseguenza, la funzione

$$x \mapsto \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{(t-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dt,\ \sigma > 0,\ x_0 \in \mathbb{R},$$

calcolandone il massimo e gli asintoti orizzontali, sapendo che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e usando la sostituzione $y = \frac{t-x_0}{\sqrt{2\pi}}$. Fare i grafici e confrontarli.

Capitolo 3

Equazioni differenziali

Ci limiteremo essenzialmente alla teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie lineari in forma normale. Piú precisamente studieremo la teoria generale delle equazioni di ordine n e i metodi risolutivi per le equazioni del primo ordine e del secondo ordine a coefficienti costanti.

Per facilitare lo studio daremo i teoremi fondamentali della teoria, presenti nel testo di riferimento, nella forma semplificata che serve nel caso considerato. Inoltre faremo uso del linguaggio dell'algebra lineare per sottolineare come problemi diversi possono essere trattati con metodi simili.

Quando il modo di trattare l'argomento è analogo a quello del libro, viene riportato solo l'argomento.

3.1 12–20/03/09. Cap.16: Introduzione e Par. 16.1, 16.3, 16.5, 16.6.

3.1.1 Venerdí 12/03/10

14-15. La nozione di equazione differenziale ordinaria (EDO) e nozione di soluzione.

Come abbiamo visto, la ricerca di una primitiva su un intervallo è l'esempio più semplice di *equazione differenziale*

$$y' = f(x),$$

cioè la ricerca di una funzione con assegnata derivata. L'incognita è una funzione definita su un intervallo I (indicata con y) e l'equazione coinvolge la funzione incognita e le sue derivate (in questo caso appare esplicitamente solo la derivata prima della funzione). Come abbiamo visto la soluzione può non esistere, ma se la soluzione esiste non è unica, per sceglierne una bisogna assegnare la *condizione iniziale*, cioè il valore della funzione in un punto $x_0 \in I$, detto iniziale. Inoltre sappiamo che se $f \in C^0(I)$, la soluzione esiste.

Piú in generale una equazione differenziale ordinaria (indicata spesso con l'acronimo EDO, in italiano, oppure ODE dall'inglese ordinary differential equation) è una equazione la cui incognita è **una funzione definita su un intervallo** e che lega fra loro la funzione incognita e un numero finito di sue derivate. L'ordine massimo di derivazione che appare nell'equazione si dice *ordine dell'equazione.* Se la derivata di ordine massimo si può scrivere come funzione della variabile indipendente, della funzione e delle altre derivate, la EDO si sice *in forma normale.* Indicheremo una EDO di ordine n in forma normale col simbolo

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{3.1}$$

In questa scrittura x indica la variabile indipendente e y è il simbolo per la funzione incognita. A seconda del contesto altre lettere possono essere usate sia per la variabile indipendente che per l'incognita.

In particolare se la variabile indipendente indica il tempo, viene indicata con t. In questo caso la derivazione viene spesso indicata con un punto sovrascritto, ad esempio

$$\ddot{x} = t x \dot{x}$$

è una EDO del secondo ordine in forma normale dove la variabile indipendente è t e il simbolo per la funzione è x.

Altre notazioni sono in uso, ad esempio la dipendenza dalla variabile independente può essere esplicitata scrivendo

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Definizione 3.1.1. *Una funzione f definita su un intervallo I si dice soluzione dell'equazione (3.1) se*

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \, , \ \forall x \in I.$$

Cioè sostituendo la funzione soluzione nell'equazione, si deve ottenere una identità fra funzioni definite sull'intervallo I.

Si noti che per definizione le soluzioni di una EDO sono definite su intervalli, altrimenti tutta la teoria in proposito sarebbe falsa.

Come abbiamo visto anche nel caso più semplice, se la soluzione esiste non è unica, per ottenere l'unicità della soluzione su un *intervallo massimale* bisogna introdurre il *problema di Cauchy* detto anche *ai valori iniziali*

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = b_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \tag{3.2}$$

cioè si devono assegnare i valori assunti in un punto x_0 dalla funzione e dalle sue derivate fino all'ordine $n-1$. In generale nel problema di Cauchy l'incognita è la funzione e l'intervallo massimale su cui può essere definita.

Una EDO si dice *lineare*, se l'equazione che la definisce è un polinomio di primo grado nell'incognita e le sue derivate. Indicheremo una EDO lineare con

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = \varphi(x). \tag{3.3}$$

L'equazione si dice *omogenea* se la funzione φ è la funzione nulla. L'equazione si dice *non omogenea* se non è omogenea.

Esercizi 3.1.1. Esempi di Edo.

1. *Abbiamo già visto l'equazione differenziale legata al problema della caduta dei gravi lungo la verticale.*

2. **Moto dei gravi (in assenza di viscosità).** *In un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente,* **se si trascura la resistenza dell'aria e si considera costante la forza peso**, *indicando con*

$$t \mapsto P(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

il moto della particella, le equazioni differenziali sono

$$x''(t) \equiv 0, \ y''(t) \equiv 0, \ z''(t) \equiv -g.$$

Scegliendo opportunamente il sistema cartesiano, si puo' sempre ipotizzare che al tempo 0 *il grave si trovi nel punto* $P_0 \equiv (0, 0, z_0)$, $z_0 \geq 0$, *ed abbia velocita'*

$$\vec{v}_0 = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{k}, \; a \geq 0,$$

dove $a\,\vec{\imath}$ *e' la velocita' orizzontale e* $b\,\vec{k}$ *e' la velocita' verticale. Si ottengono le condizioni iniziali*

$$x(0) = 0, \; y(0) = 0, \; z(0) = z_0, \; x'(0) = a, \; y'(0) = 0, \; z'(0) = b.$$

Il teorema di Lagrange ci permette di determinare l'equazione di moto del grave

$$x(t) \equiv a\,t, \; y(t) \equiv 0, \; z(t) \equiv z_0 + b\,t - g\,\frac{t^2}{2}.$$

Si noti che il moto e' verticale se e solo se $a = 0$ *e che se* $a \neq 0$ *la traiettoria e' una parabola nel piano verticale che contiene la direzione di* $\vec{v}_0$*. Le equazioni della parabola sono*

$$z = z_0 + \frac{b}{a}\,x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{a^2}.$$

Esercizio proposto. *Si determini l'equazione della traiettoria* $z = f(x)$ *in funzione del modulo (intensità) di* $\vec{v}_0$*, e dell'angolo (orientato) che la velocità iniziale forma con il piano orizzontale. Si disegnino i possibili grafici della traiettoria, considerando che il piano terra abbia quota* $z = 0$*. Che significato ha l'approssimazione lineare della traiettoria in* $x = 0$*?*

3. **Caduta dei gravi in mezzo viscoso.** *Il moto avviene in direzione verticale e, detto* $k > 0$ *il coefficiente di viscosità e* m *la massa, l'equazione (con le notazioni del punto precedente) diventa*

$$z''(t) \equiv -g - \frac{k}{m} z'(t).$$

Indicando la velocità z' *con* v *e* $\mu = \frac{k}{m}$ *si ottiene l'equazione differenziale* lineare del primo ordine non omogenea

$$v'(t) + \mu v(t) \equiv -g.$$

Si nota che in un circuito in cui sia presente una resistenza e una induttanza costanti (R e L rispettivamente) e una differenza di potenziale $t \mapsto E(t)$*, l'intensità di corrente* $t \mapsto I(t)$ *soddisfa ad una equazione simile alla precedente data da*

$$I'(t) + \frac{R}{L}\,I(t) \equiv E(t).$$

4. **Accrescimento di una popolazione in ambiente con risorse illimitate.** *L'equazione che caratterizza questo problema è data da*

$$\dot{x} = a\,x\,, \quad a > 0\,, \qquad x(0) = x_0 > 0.$$

Se $a < 0$*, la stessa equazione descrive il decadimento di una "popolazione", ad esempio il decadimento radiattivo.*
Esercizio da fare. *Verificare che la funzione* $f : t \mapsto x_0 e^{at}$ *è soluzione del precedente problema di Cauchy su* $\mathbb{R}$*.*

5. **Equazione logistica.** *Descrive l'accrescimento di una "popolazione" in presenza di un limite per le risorse, cioè "l'ambiente" può "nutrire" una popolazione fino ad un massimo di $x = a/b$.*

$$\dot{x} = x(a - bx)\,, \quad b, a > 0\,, \qquad x(0) = x_0 > 0.$$

Si noti che l'approssimazione lineare della dinamica coincide con quella del precedente esercizio. Entrambe sono approssimazioni di un problema più complesso.
Esercizio da fare. *Verificare che*

   (a) *L'equazione differenziale ha due sole soluzioni costanti (definite su tutto $\mathbb{R}$) date da $f : t \mapsto 0$ e $g : t \mapsto a/b$. f è soluzione del problema di Cauchy con $x_0 = 0$ mentre g è soluzione del problema di Cauchy con $x_0 = a/b$.*

   (b) *Se $x_0 \in (0, a/b)$ allora la funzione*

   $$f : t \mapsto \frac{a}{b}\,\frac{1}{1 + ce^{-at}}, \quad \text{dove} \quad c = \frac{a - bx_0}{bx_0} > 0$$

   è soluzione del precedente problema di Cauchy su $\mathbb{R}$. Disegnare il grafico della soluzione, notando che è crescente ed ha due asintoti orizzontali (quali?).

   (c) *Se $x_0 > a/b$, allora la funzione*

   $$f : t \mapsto \frac{a}{b}\,\frac{1}{1 + ce^{-at}}, \quad \text{dove} \quad c = \frac{a - bx_0}{bx_0} < 0$$

   è soluzione del precedente problema di Cauchy sulla semiretta $(-\frac{\ln(-c)}{a}, +\infty)$. Disegnare il grafico della soluzione, notando che è decrescente ed ha un asintoto verticale ed uno orizzontale (quali?).

Inoltre disegnare le soluzioni del problema di Cauchy al variare di $x_0 > 0$.

6. **Equazione di moto del pendolo per le piccole oscillazioni**. *Un pendolo di lunghezza l, spostato di un angolo orientato α dalla posizione di equilibrio stabile $\alpha = 0$ è sottoposto ad una forza (risultante della forza peso e della reazione vincolare) che ha direzione tangente alla circonferenza descritta dal pendolo e verso che si oppone allo spostamento. Un semplice conto trigonometrico mostra che l'intensità della forza è data da $g\sin(\alpha)$. L'equazione fondamentale della dinamica implica che lo spostamento dalla posizione di equilibrio $t \mapsto s(t) = l\,\alpha(t)$ soddisfa alla seguente equazione differenziale non lineare del secondo ordine.*

$$s''(t) + g\sin(s(t)/l) = 0.$$

Piccole oscillazioni. *Significa che consideriamo la parte principale della forza, in questo caso l'equazione diventa lineare del secondo ordine. Indicando con ω^2 il numero positivo g/l, si ottiene*

$$s''(t) + \omega^2\, s(t) = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \alpha''(t) + \omega^2\, \alpha(t) = 0,$$

detta anche equazione del moto armonico. Si noti che una equazione simile si ottiene anche quando siamo in presenza di una forza elastica che si oppone al moto.
Esercizio da fare.

   (a) *Verificare che le funzioni $t \mapsto \sin(\omega t)$ e $t \mapsto \cos(\omega t)$ sono soluzioni dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.*

(b) *Verificare che, per ogni* $A, B \in \mathbb{R}$, *la funzione* $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ *è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni. Vedremo in seguito che al variare di* $A, B \in \mathbb{R}$ *otteniamo tutte le soluzioni dell'equazione.*

(c) *Verificare che, per ogni* $\rho, \beta \in \mathbb{R}$, *la funzione* $t \mapsto \rho\cos(\omega t + \beta)$ *è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.*

(d) *Verificare che le forme (b) e (c) per le soluzioni del moto armonico sono equivalenti. Nella forma (c) alle coppie di parametri* (ρ, β) *e* $(-\rho, \beta+\pi)$ *corrisponde la stessa soluzione. Nelle applicazioni spesso si usa* $\rho \geq 0$ *e* $\beta \in [0, 2\pi)$. ρ *è detta ampiezza dell'oscillazione e* β *fase. Inoltre a* $\rho = 0$ *o equivalentemente a* $A = B = 0$ *corrisponde la soluzione nulla. Disegnare il grafico delle soluzioni in funzione di ampiezza e fase.*

(e) *Determinare la soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni con condizioni iniziali* $s(0) = s_0,\ s'(0) = 0$ *(spostamento del pendolo dalla posizione di equilibrio) e con condizioni iniziali* $s(0) = 0,\ s'(0) = v_0$ *(spinta del pendolo nella posizione di equilibrio). A quale problema di Cauchy corrisponde la soluzione nulla?*

7. *Verificare che le funzioni definite da*

$$f_1(x) = x \quad e \quad f_2(x) = -1/x^2$$

sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ *dell'equazione lineare omogenea*

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0. \tag{3.4}$$

8. *Verificare che le funzioni definite da*

$$f_1(x) = x^2 \quad e \quad f_2(x) = x^2\ln(x)$$

sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ *dell'equazione lineare omogenea*

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0. \tag{3.5}$$

9. *La funzione definita da* $f(x) = -1/x^2$ *è soluzione dell'equazione 3.5? La funzione definita da* $g(x) = \ln(x)$ *è soluzione dell'equazione 3.5? Giustificare le risposte.*

3.1.2 Mercoledí 17/03/10

16-18. Nel paragrafo 16.5 è svolta la teoria delle equazioni lineari del secondo ordine che qui svolgiamo per quelle di ordine n.

Teorema 3.1.1 (di Cauchy o ai valori iniziali per EDO lineari)**.** *Siano* $a_0, \ldots, a_{n-1}, \varphi \in C^0(I)$, $x_0 \in I$ *e* $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. *Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x) \\ y(x_0) = b_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \tag{3.6}$$

ammette una soluzione unica su I *che è di classe* C^n.

Dimostrazione. Non facciamo la dimostrazione del teorema, il cui enunciato va comunque saputo e compreso. Il teorema è la versione adattata al caso di EDO lineari dei Teoremi 16.4 e 16.5 del testo. Il Teorema 16.9 è il Teorema 3.1.1 per le equazioni del secondo ordine.

Corollario 3.1.1. *Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I)$ e $x_0 \in I$. Allora la soluzione identicamente nulla su I è l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Esercizio. Applicare, ove possibile, il teorema di Cauchy e il suo corollario agli Esercizi 3.1.1 e interpretarli nel loro contesto.

Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I)$, ponendo $a_n(x) \equiv 1$, possiamo scrivere una equazione lineare omogenea in forma normale come

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0 \tag{3.8}$$

All'equazione possiamo associare un cosidetto *operatore differenziale*, cioè una applicazione

$$\mathcal{P} := \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^i : f \in C^n(I) \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^i f \in C^0(I).$$

Lemma 3.1.1. *L'operatore $\mathcal{P}$ è lineare e le soluzioni dell'equazione 3.8 sono il suo nucleo. Quindi l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Per esercizio: si tratta di far vedere (usando la linearità della derivata) che per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e per ogni $f_1, f_2 \in C^n(I)$, si ha $\mathcal{P}(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1\mathcal{P}(f_1) + c_2\mathcal{P}(f_2)$. Lo studente ripeta per questo caso la dimostrazione che il nucleo di un operatore lineare è uno spazio vettoriale.

Teorema 3.1.2 (senza dimostrazine)**.** *L'insieme* $\ker \mathcal{P}$ *delle soluzioni di una EDO lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n. Cioè esistono n funzioni linearmente indipendenti $f_1, \dots, f_n \in C^n(I)$ tali che*

$$\ker \mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \colon c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ *si dice anche* la soluzione generale *dell'equazione e $c_1, \dots, c_n$ si dicono* le costanti arbitrarie.

Inoltre $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se sono soluzioni di problemi di Cauchy associati all'equazione con condizioni iniziali in $x_0 \in I$ che sono vettori linearmente indipendenti. In altre parole possiamo trovare una base per $\ker \mathcal{P}$ *risolvendo n problemi di Cauchy del tipo*

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{cases}$$

Esercizi 3.1.2. *1. Determinare la soluzione generale per le EDO lineari omogenee degli Esercizi 3.1.1 n. 4,6,7,8.*

2. Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy, ricordando la soluzione generale calcolata nel precedente esercizio.

$$\begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Argomenti da vedere sul testo.

1. Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea del primo ordine

$$y' = a(x)y$$

e soluzione del problema di Cauchy (Teorema 16.1 del testo).

2. Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti (Par. 16.6.1)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 3.1.3. *Sia h una qualsiasi soluzione della EDO lineare non omogenea 3.3, allora l'insieme delle soluzioni di 3.3 è dato da*

$$\{f + h \colon f \in \ker \mathcal{P}\}\,.$$

Con le notazioni del precedente Teorema 3.1.2, $y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) + h$ si dice anche la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
Inoltre h viene chiamata anche soluzione particolare, ed il teorema viene anche enunciato come: "la soluzione generale di una EDO lineare non omogenea si ottiene come la somma della soluzione generale della EDO omogenea associata con una soluzione particolare".

Si noti che il precedente teorema è l'analogo di un risultato sulle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo in n incognite e che anche le dimostrazioni sono completamente analoghe.

Esercizi 3.1.3. *1. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine sulla semiretta* $(0, +\infty)$

$$x^2 y'' + 2xy' - \frac{15}{4}y = 0.$$

a. Verificare che $y(x) = x^{3/2}$ e $y = x^{-5/2}$ sono soluzioni della precedente equazione

b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione

c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2$$

d. Discutere l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione con le condizioni

$$y(1) = 1, \qquad y(10) = 1$$

2. *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine*

$$y'' + y = -2\tan(x).$$

a. Verificare se

$$y = 2\cos(x)\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

è soluzioni della precedente equazione ed in quale intervallo (quali intervalli)

b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -3$$

d. Discutere l'esistenza e l'unicità, al variare di $a \in \mathbb{R}$ *della soluzione dell'equazione con le condizioni*

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = a$$

3. *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine*

$$y'' + 3y' + 3y = 0.$$

a. Determinare la soluzione generale della precedente equazione.

b. Determinare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

c. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ *la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali*

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

tende a 0 *per* $x \mapsto +\infty$?

4. *Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione*

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$$

e che al tempo $t = 0$ *si abbia* $y(0) = 0$ *e* $\dot{y}(0) = 3$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e disegnarne il grafico.

b. Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$

c. Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ *per cui lo spostamento della molla che al tempo* $t = 0$ *soddisfa a*

$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$

decresce senza oscillare.

5. *Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione*

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$$

e che al tempo $t = 0$ *si abbia* $y(0) = 0$ *e* $\dot{y}(0) = 2$

(a) Determinare lo spostamento in funzione del tempo

(b) Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$

(c) Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ *per cui lo spostamento della molla che al tempo* $t = 0$ *soddisfa a*

$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$

decresce senza oscillare.

3.1.3 Venerdí 19/03/10. Lezioni tenute dal Dott. Bussoli

19-20. Argomenti da vedere sul testo.

1. Metodo di variazione della costante e metodi "ad hoc" per il calcolo di una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea del primo ordine
$$y' = a(x)y + b(x).$$
Soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy (Par.16.1 del testo).
2. Metodo di variazione delle costanti e metodi "ad hoc" per il calcolo di una soluzione particolare per le equazioni lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti (Par.16.6.2).

Esercizi fatti o proposti.

1. Risolvere, col metodo di variazione delle costanti, l'equazione lineare del primo ordine
$$y' = -4y + 3x + 1$$
2. Risolvere, coi metodi "ad hoc", l'equazione lineare del primo ordine:
$$y' = y + \sin x$$
3. Risolvere, coi metodi "ad hoc", il problema di Cauchy del primo ordine:
$$\begin{cases} y' = 3y + e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
4. Risolvere, coi metodi "ad hoc", il problema di Cauchy del primo ordine:
$$\begin{cases} y' = 2y + e^{2x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$
5. Risolvere, col metodo di variazione delle costanti, l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti
$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
6. Esercizio proposto: fare lo stesso con
$$y'' - y = \frac{1}{y}, \quad x \in (0, +\infty).$$
7. Trovare, coi metodi "ad hoc", la soluzione generale di
$$y'' + 2y' - 3y = e^{4x}.$$
8. Esercizio (da finire): risolvere coi metodi "ad hoc" il problema di Cauchy del secondo ordine
$$\begin{cases} \ddot{x} + 9x = -\sin t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$$
e darne un'interpretazione fisica.

9. Esercizio proposto (fare come col precedente): determinare la soluzione generale di

$$\ddot{x} + 9x = -\sin 3t$$

(tenendo conto che una soluzione particolare sará del tipo $t(A \cdot \cos 3t + B \cdot \sin 3t)$, e non $A \cdot \cos 3t + B \cdot \sin 3t$) e darne un'interpretazione fisica.

Esercizi 3.1.4. *1. Risolvere i problemi di Cauchy con $x(0) = 1$ associati alle seguenti equazioni*

$$\begin{aligned} x' &= 4x \\ x' &= x + 3t^3 + 4t^2 + 1 \\ x' &= x + \sin t \\ x' &= 3x + \exp(2t) \end{aligned}$$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:
$x'' + 9x = -\sin t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$
$x' = 1/(1 - t^2)x,\ x(0) = 2$

3. Determinare la soluzione generale di:
$x'' + 9x = -\sin 3t$
$x'' + 2x' - 3x = \exp(lx)$ *nei casi* $l \neq -3, 1$ *e* $l = 1$
$x'' + x = t^3 - t + 1.$

4. Verificare che se y_1 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t)$ e y_2 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_2(t)$, allora $(y_1 + y_2)$ e‘ soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t) + f_2(t)$

5. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} + 16x = -\cos(t)$$

e che al tempo 0 lo spostamento valga $x(0) = 0$ e la velocità valga $\dot{x}(0) = -1$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo

b. Esiste l'ampiezza massima dell'oscillazione? Come si puó determinare?

c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

6. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} + 9x = -\sin(3\,t)$$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e della posizione e velocità al tempo 0

b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione

c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

7. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + 4y' + y = \sin(3x)\,. \tag{3.9}$$

a. Determinare la soluzione generale dell' equazione omogenea associata

b. Determinare la soluzione generale dell' equazione non omogenea *c. Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali*

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

d. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione delle equazioni (omogenea e non omogenea) con condizioni iniziali

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

tende a $-\infty$ per $x \mapsto +\infty$?

3.2 22–31/03/10

3.2.1 Mercoledì 24/03/10.

21-23. Esercizi su funzioni integrali e equazioni differenziali:

1. Studio di $y'' + \omega^2 y = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$, risonanza ($\alpha = \omega$) e soluzioni periodiche ($\alpha \neq \omega$)
2. Studio di $y'' + 2\mu y' + \omega^2 y = 0$, $\mu > 0$, possibili soluzioni in dipendenza del discriminante dell'equazione caratteristica ed esempi di problemi di Cauchy associati.
3. Esempi di EDO lineari con condizioni diverse da quelle di Cauchy.

3.2.2 Venerdí 26/03/10.

Prova intercoso: test.

3.2.3 Mercoledì 31/03/10.

Prova intercorso: scritto.

3.3 6–10/04/10

3.3.1 Venerdì 09/04/10. Lezioni tenute dal Dott.Bussoli

24-25. Svolgimento esercizi della prova scritta del 31/03/10

Capitolo 4

Funzioni di più variabili

Per questa parte del corso verrà seguita essenzialmente l'impostazione del libro e saranno segnalate le parti da svolgere. Inoltre i teoremi citati sono da intendersi senza dimostrazione, se non esplicitamente detto.

Se il modo di trattare l'argomento è analogo a quello del libro, viene riportato solo l'argomento.

Lo studente che lo preferisca può seguire ogni altra impostazione, purché coerente.

4.1 Settimana 12-17/04/10. Cap. 10.

Gli argomenti di questa settimana sono la continuità ed i limiti delle funzioni di più variabili. Gli argomenti da conoscere sono descritti in dettaglio per ogni giorno di lezione.

Di seguito diamo i paragrafi del Cap.10 del testo che fanno parte del programma. Introduzione; 10.1 escluso il Teorema10.1; 10.1.1; 10.2; 10.2.1 solo la caratterizzazione degli insiemi compatti e l'Esercizio 10.6; 10.2.2 esclusi la Definizione 10.7 e il Teorema 10.4; 10.2.3; 10.3; 10.3.1; 10.3.2-3 essenzialmente i metodi per risolvere gli esercizi.

4.1.1 Mercoledí 14/04/10

26-28. Argomenti da vedere sul testo e/o da confrontare con gli analoghi visti per le funzioni reali di variabile reale:

1. Concetti base in $\mathbb{R}^n$ e loro confronto con i concetti analoghi su $\mathbb{R}$ (inizio Par. 10.1 escluso Teorema 10.1): prodotto scalare, modulo o norma, distanza, disuguaglianza triangolare, ortogonalità

2. Intorni sferici $B_\epsilon(P)$, indicati anche $I_\epsilon(\mathbf{x_0})$, in analogia con il caso $n = 1$.

3. Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, punti isolati; insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi limitati.

4. Esempi 10.2 e 10.3 del testo, esercizi 10.1 e 10.2. del testo

5. Grafico, equazione del grafico e convenzione sul dominio per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Caso particolarmente importante: $m = 1$, vedi Par. 10.3. Curve e superfici di livello di funzioni a valori scalari, inizio del Cap.10.

6. Esempi dalla geometria: equazioni parametriche e cartesiane di retta e piano in $\mathbb{R}^3$.

Come fatto in $\mathbb{R}$ daremo prima la definizione di continuità e poi quella di limite, molti dei risultati e definizioni si ottengono da quelli visti usando l'opportuno significato di intorno.

Definizione 4.1.1. *La funzione $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice continua in $\mathbf{x_0} \in D_f$ se per ogni intorno $I_\epsilon(f(\mathbf{x_0}))$ di $f(\mathbf{x_0})$ in $\mathbb{R}^m$ esiste un intorno $I_\delta(\mathbf{x_0})$ di $\mathbf{x_0}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(I_\delta(\mathbf{x_0}) \cap D_f)$ è contenuto in $I_\epsilon(f(\mathbf{x_0}))$. Inoltre f si dice continua se lo è in ogni punto del suo dominio.*

Esercizi

1. (Da fare.) Confrontare la Definizione 4.1.1 con la definizione di limite e continuità date nel libro alle pag. 277-278. Inoltre riscriverla in termini di $|| \cdot ||$ in maniera analoga alla definizione di limite riportata a pag.277 del libro.

2. La funzione $x_i : (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto a_i \in \mathbb{R}$ si dice i-esima funzione coordinata. Dimostrare, usando la definizione, che è continua.

3. Sia $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\gamma_i : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{x_0} + te_i \in \mathbb{R}^n$ si dice i-esima curva coordinata in $\mathbf{x_0}$. Dimostrare, usando la definizione, che è continua.

4. Data la funzione $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, componendola con le m funzioni coordinate di $\mathbb{R}^m$, si ottiene $f = (f_1, \dots, f_m)$. Dimostrare il seguente risultato, vedi anche la formula (10.2) del testo e le proprietà generali a pag.278.

   Teorema 4.1.1. *$f = (f_1, \dots, f_m) : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua in $\mathbf{x_0}$ se e solo se lo sono le funzioni $f_i : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.*

Teorema 4.1.2 (senza dimostrazione)**.** *Ogni funzione ottenuta combinando funzioni continue tramite operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione è continua. Più precisamente: ... completare per esercizio confrontando con l'analogo teorema per le funzini da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, attenzione a quali operazioni si possono considerare per qualsiasi dimensione del dominio e del codominio.*

Esercizio. Fare l'Esempio 10.10 del testo come applicazione del precedente teorema.

Argomenti da vedere sul testo e/o da confrontare con gli analoghi visti per le funzioni reali di variabile reale:

1. Definizione di insieme compatto come insieme chiuso e limitato, pg.279 del testo. Esercizio 10.6 del testo.

2. Teorema di Weierstrass, Teorema 10.2 del testo.

3. Curve parametrizzate, Par.10.2.3 (tutto). Definizione ed esempi dalla geometria: equazioni parametriche della retta nel piano e nello spazio.

4.1.2 Venerdí 16/04/10

29-30. Argomenti da vedere sul testo e/o da confrontare con gli analoghi visti per le funzioni reali di variabile reale:

1. Curve parametrizzate il cui sostegno è una circonferenza e una ellisse: Sia $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, numeri reali strettamente positivi e r, r_1, r_2 $t \in [0, 2\pi]$, allora

$$\begin{cases} x = & a + r\cos(t) \\ y = & r\sin(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = & a + r_1\cos(t) \\ y = & r_2\sin(t) \end{cases}$$

   sono curve parametrizzate i cui sostegni rappresentano una circonferenza di centro P e raggio r e una ellisse di centro P e semiassi r_1 e r_2, risprttivamente.

2. Definizione di insieme connesso per archi (definizione 10.9 del testo), analogia con gli intervalli di $\mathbb{R}$. Esempi grafici, cerchio, corona circolare.

3. Definizione di insieme convesso (definizione 11.6 del testo). Esempi grafici, il cerchio è convesso, la corona circolare non lo è.

4. Teorema degli zeri e dei valori intermedi per funzioni continue su insiemi connessi per archi, pg.284 ed esercizi 10.10 b) e c) del testo. Entrambi sono corollari del seguente teorema.

   Teorema 4.1.3. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso per archi e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua, allora $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ è connesso per archi.*

   Dimostrazione. Siano $P_1 = f(Q_1)$ e $P_2 = f(Q_2)$ due punti in $f(A)$. Poichè A è connesso per archi, esiste una curva parametrizzata $\gamma : [a, b] \to A$ tale che $f(a) = P_1$ e $f(b) = P_2$. Il sostegno della curva parametrizzata $f \circ \gamma$ è contenuto in $f(A)$ e congiunge i punti P_1, P_2, quindi $f(A)$ è connesso per archi.

5. Applicazioni del teorema del segno allo studio delle disequazioni ed ai domini delle funzioni, Esercizio 10.9 del testo. Esempio: determinare il segno della funzunzione definita da $f(x, y) = x^2 + y^2 - |2x + 2y|$.

6. L'elemento ∞ ed i suoi intorni, Par.10.1.1 del testo.

7. Definizione di "definitivamente per $x \to \alpha \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$" e di limite di funzioni di piú variabili, Par. 10.2. Esempi di verifica di limiti:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$$

8. Riduzione al caso di funzioni a valori scalari (Par.10.3).

9. Esempi, relazione fra continuità e limiti, uso della continuità per il calcolo dei limiti e limiti delle funzioni combinate.

4.2 Settimana 19-24/04/10. Par. 11.1,2

4.2.1 Mercoledí 21/04/10. Lezioni tenute dal Dott.Bussoli.

31-33. Esempi ed esercizi.

1. Esempi di insiemi determinati e disegnati col teorema degli zeri: aperti, chisi, né aperti né chiusi, limitati, non limitati, compatti, convessi e non, connessi e non; dire di ogni insieme l'interno, la chiusura e la frontiera:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\};$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\};$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 < 4\};$$
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y < 10\};$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \le 10\};$$
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x + 3y \le 10\};$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x + 3y < 10\};$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x + 3y < 10\};$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x + 3y \leq 10, -2 \leq x - y \leq 2\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x + 3y < 10, -2 < x - y < 2\};$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 16x + 28 \leq y \leq x^2 - 8x + 21\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(xy) < 1\,, \quad x^2 + y^2/4 \leq 1\}.$$

2. Teorema di invertibilità delle funzioni continue (Teorema 10.3 del testo):*sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e sia $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua ed invertibile in K; allora l'inversa f^{-1} é continua nel suo dominio $f(K)$.*
   Osservazione: questo teorema é analogo al teorema visto per funzioni definite in $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$.

3. Condizione necessaria per l'esistenza del limite tramite la composizione con curve parametrizzate, in particolare con rette.
   Teorema:*data $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, abbiamo che*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = l \Leftrightarrow \forall A \subseteq X : \mathbf{x_0} \in Acc(A) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}, \mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) = l.$$

4. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} + \cos(x + y) \right)$$

   (esempio 10.15 del testo).

5. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

   (esempio 10.16 del testo).

6. Esempi di curve parametrizzate: spirali nel piano e nello spazio, per $t \in [0, +\infty)$

$$\begin{cases} x = & t\cos(t) \\ y = & t\sin(t) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = & \cos(t)/(1+t) \\ y = & \sin(t)/(1+t) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = & \cos(t) \\ y = & \sin(t) \\ z = & t \end{cases}$$

7. Determinare se la funzione definita da $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ è continua e calcolare, se esiste $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$. Inoltre usare le coordinate polari per verificare che è costante sulle semirette ed ha massimo e minimo globali.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$. Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$ e dare la definizione di $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$. Inoltre discutere l'esistenza di massimo e minimo della funzione nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2 e nel cerchio aperto; calcolarli, se esistono, usando le coordinate polari. La funzione è limitata? Passando a coordinate polari discutere l'esistenza di massimo e minimo globali.

9. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{(x,y)\to\infty}(x^2+y^2)^2-2(4x^2-y^2)\,, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty}(x^2-9y^2)-(x^2+y^2)^2.$$

10. Determinare dominio e continuitá della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{1+5y+7xy}+\cos(3x)-\frac{5}{2}y$$

e giustificare l'esistenza o meno di massimo e minimo assoluti di $f(x,y)$ (col solo teorema di Weierstrass).

11. Disegnare gli insiemi (che in questo caso sono curve) di livello di $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=x^2-y^2$.

4.2.2 Venerdí 23/04/10

34-35. Argomenti da vedere nei Par. 11.1 e 11.2 del testo.

1. Derivata di una curva parametrizzata, detta anche vettore tangente o vettore velocità (definizione nel Teorema 11.2 vedi anche pg.320 del testo).

2. Derivate direzionali e derivate parziali di funzioni a valori scalari, gradiente (Par. 11.1).

3. Differenziabilità di funzioni a valori scalari, continuità delle funzioni differenziabili.

4. Funzioni di classe $C^1(A)$ e condizione sufficiente per la differenziabilità (Definizione 11.4 e Corollario 11.1).

4.3 Settimana 26-30/04/10. Par. 11.3,4

4.3.1 Mercoledí 28/04/10

36-38. Argomenti da vedere nei Par. 11.2–11.6 del testo.

1. Regola della catena (Par 11.2 pag.294-299) con dimostrazione.

2. Differenziabilità delle funzioni combinate.

3. Piano tangente al grafico, direzioni di massima e minima crescita (Par 11.2 pag.294-299).

4. Estenzione del teorema di Lagrange: Teorema 11.4 con dimostrazione.

5. Derivate seconde, teorema di Schwartz, matrice Hessiana, derivate di ordine superiore (Par.11.3)

6. Polinomio di Taylor di ordine 2 col resto in forma di Peano (Par. 11.4).

4.3.2 Venerdí 30/04/10. Lezioni tenute dal Dott.Bussoli.

39-40. Polinomio di Taylor di ordine 1 col resto in forma di Lagrange (Par. 11.4) e suo significato (anche nel caso di funzioni con variabile scalare. Esercizi fatti o proposti:

1. Determinare e disegnare il vettore tangente (vettore velocità) e la retta tangente alla curva
$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & t \cdot \cos(t) \\ y(t) = & t \cdot \sin(t) \end{cases} \quad t > 0,$$
in $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (osserviamo che $\dot{\gamma}(t) \neq (0,0)\ \forall t > 0$).

2. Determinare e disegnare il vettore tangente (vettore velocità) e la retta tangente alla curva
$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & \frac{\cos(t)}{1+t} \\ y(t) = & \frac{\sin(t)}{1+t} \end{cases} \quad t > 0,$$
in $\gamma(\pi)$.

3. Determinare e disegnare il vettore tangente (vettore velocità) e la retta tangente alla curva
$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & \cos(t) \\ y(t) = & \sin(t) \\ z(t) = & t \end{cases} \quad t > 0,$$
in $\gamma(2\pi)$.

4. Se in una curva $\gamma(t)$ c'è un punto singolare, cioè tale che $\dot{\gamma}(t) = (0, 0, ..., 0)$, lì il vettore tangente può non esistere: ad esempio, data
$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & t^3 \\ y(t) = & t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$
in $t = 0$ non c'è il vettore tangente.

5. Esercizio proposto: data la curva
$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & t^3 + t^4 \\ y(t) = & \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{cases} \quad t \in [-2; 2],$$
determinare i valori di t per cui il vettore velocità si annulla (punti singolari) e la retta tangente alla curva in $t = -1$ (esercizio 12.1a del testo)

6. Determinare il piano tangente al grafico di $f(x, y) = \sin x + \cos x \cdot \sin y + x$ in $P \equiv (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (perchè tale piano esista, è necessaria la differenziabilità di f in quel punto).

7. Esercizio proposto: determinare il piano tangente al grafico di $f(x, y) = x + 2xy + 3y^2$ in $P \equiv (4, 1)$ (esercizio 11.3a del testo).

8. Esercizio proposto: determinare il piano tangente al grafico di $f(x, y) = \sin(xy^2)$ in $P \equiv (\pi, 1)$ (esrcizio 11.3b del testo).

9. Determinare la direzione di massima e minima crescita di $f(x, y) = x^2 \sin(y) + xye^x$ in $P \equiv (2, \frac{\pi}{2})$.

10. Esercizio proposto: determinare la direzione di massima e minima crescita di $f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^2+1}$ in $P \equiv (-1, \frac{3}{2})$.

11. L'esistenza e la contiunuità delle derivate parziali prime implica la differenziabilità. Esempio: dimostrare che

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in (0,0).

12. La differenziabilità implica la derivabilità e la continuità. Esempio: dimostrare che

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ xy = 0 \\ 1 & se\ xy \neq 0 \end{cases}$$

non è differenziabile in (0,0) (lo facciamo provando che in $(0,0)$ f è derivabile ma non è continua).

13. Esercizio proposto: data

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

far vedere che esistono le derivate parziali prime di f in $(0,0)$ ma che f non è differenziabile in $(0,0)$.

14. La differenziabilità implica la derivabilit in ogni direzione, ma non viceversa. Controesempio: dimostrare che

$$f(x,y) = \begin{cases} x & se\ y = 0 \\ 0 & se\ y \neq 0 \end{cases}$$

ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma non è differenziabile in $(0,0)$ (perchè non vale la formula per il calcolo delle derivate direzionali che vale per le funzioni differenziabili) (esercizio 11.6 del testo).

15. Esercizio proposto: dimostrare che

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = 0 \end{cases}$$

ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma non è differenziabile in $(0,0)$ (perch non vale la formula per il calcolo delle derivate direzionali che vale per le funzioni differenziabili).

16. Formula dello sviluppo in serie di Taylor di una funzione fino al secondo ordine col resto nella forma di Peano:
-per funzioni di n variabili;
-nel caso particolare di funzioni di una variabile;
-nel caso particolare di funzioni di due variabili.

17. Formula dello sviluppo in serie di Taylor di una funzione fino al secondo ordine col resto nella forma di Lagrange:
    -per funzioni di n variabili;
    -nel caso particolare di funzioni di due variabili.

18. Esercizio proposto: fare lo sviluppo in serie di Taylor fino al secondo ordine col resto sia nella forma di Peano che nella forma di Lagrange attorno $(0,0)$ di $f(x,y) = e^x \sin(y)$.

19. Esercizio proposto: fare lo sviluppo in serie di Taylor fino al secondo ordine col resto sia nella forma di Peano che nella forma di Lagrange attorno $(0,0)$ di $f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{(x^2+y^2)^2}$.

4.4 Settimana 3-8/5/10. Par. 11.5,6

4.4.1 Mercoledì 5/05/10

41-43. Forme Quadratiche (vedi anche appendice di algebra lineare on line ed il testo di geometria). Sia S una matrice simmetrica $n \times n$, definiamo la funzione, detta *forma quadratica associata ad* S,

$$Q : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \sim M_{n,1} \mapsto \mathbf{x}^T S \mathbf{x}$$

dove $\mathbf{x}$ è scritto come un vettore colonna.

Lemma 4.4.1. *Siano $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ gli autovalori di S, se $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ sono le componenti di $\mathbf{x}$ in una base ortonormale di autovettori associati a $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, allora*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 \qquad e \qquad \lambda_1 ||\mathbf{x}|| \leq Q(\mathbf{x}) \leq \lambda_n ||\mathbf{x}||.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n}\}$ una base ortonormale di autovettori associata a $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Consideriamo la matrice $n \times n$ data da $U = (\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n})$, si ha

$$UU^T = U^T U = Id \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{u_i} = U\mathbf{v}.$$

Quindi

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T U^T S U \mathbf{v}.$$

Per provare il risultato basta far vedere che $U^T S U$ è una matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale: verificarlo per esercizio, tenendo conto che

$$SU = (S\mathbf{u_1}, \cdots, S\mathbf{u_n}) = (\lambda_1 \mathbf{u_1}, \cdots, \lambda_n \mathbf{u_n})$$

e che $\{\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n}\}$ è una base ortonormale. $\square$

La forma quadratica Q (o equivalentemente la matrice S) si dice *semidefinita positiva (negativa)* se $Q \geq 0$ (≤ 0).

La forma quadratica Q (o equivalentemente la matrice S) si dice *definita positiva (negativa)* se $Q(\mathbf{x}) > 0$ (< 0), $\forall \mathbf{x} \neq 0$.

La forma quadratica Q (o equivalentemente la matrice S) si dice *non definita* se Q cambia segno.

Lemma. Q è semidefinita positiva (negativa) se e solo se gli autovalori sono non negativi (non positivi). Q è definita positiva (negativa) se e solo se gli autovalori sono positivi (negativi). Q è non definita se e solo se ci sono autovalori positivi e negativi.

Dimostrazione. Per esercizio, usare il lemma precedente.

Argomenti da vedere nel Par. 11.6.

1. Estremi liberi: definizione di punto critico o singolare, condizione necessaria del primo ordine con dimostrazione (gradiente nullo) per funzioni di classe C^1, Teorema 11.14.

2. Condizione necessaria e condizione sufficiente del secondo ordine (segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana in termini di autovalori) per funzioni di classe C^2, con dimostrazione.

3. Il caso $n = 2$.

4. Funzioni convesse su insiemi convessi (Par.11.4) e confronto col caso di variabile scalare: definizione, definizione equivalente per funzioni di classe C^1 (Teorema 11.12) e per funzioni di classe C^2 (Teorema 11.2).
   Esercizio. Dare la definizione di funzione concava su insiemi convessi e sua caratterizzazione nel caso di funzioni di classe C^1 e C^2.

5. Cenni all'approssimazione di Taylor di ordine n per funzioni di piú variabili (Definizione 11.5 e Teorema 11.9). Uso dell'approssimazione di Taylor delle funzioni di una variabile per il calcolo di quella delle funzioni di più variabili.

4.4.2 Venerdí 7/05/10. Lezioni tenute dal Dott.Bussoli.

44-45. Esercizi svolti o proposti:

1. Data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da $f(x, y) = \sqrt{1 + 5y + 7xy} + \cos(3x) - \frac{5}{2}y$, determinarne lo sviluppo in serie di Taylor del secondo ordine attorno all'origine per vedere se l'origine è un punto stazionario (o critico), e se sì di che tipo, studiandone la matrice hessiana e calcolando di questa gli autovalori.

2. Esercizio proposto: calcolare con gli sviluppi di Taylor (al più) del secondo ordine attorno all'origine
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2) + 2}{e^{2x^2+y^2} - 1}.$$

3. Esercizio proposto: calcolare con gli sviluppi di Taylor (al più) del secondo ordine attorno all'origine
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(y) - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

4. Esercizio proposto: determinare lo sviluppo di Taylor del terzo ordine della funzione $f(x, y) = y^{2x}$ attorno $(1, 1)$ (farlo col conto esplicito delle derivate parziali).

5. Studiare convessità e concavità di $f(x, y) = -2x^2y + xy^2 + x - y - 1$ con l'uso della matrice haessiana (esercizio 11.10a del testo).

6. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x, y) = x^2y^2$ (esercizio 11.10b del testo).

7. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x, y) = x^2y^2+6y^2$ (esercizio 11.10c del testo).

8. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x, y) = xe^{xy}$ (esempio 11.16 del testo).

9. Casi standard:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \text{ paraboloide ellittico;}$$

$$z = -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \text{ paraboloide ellittico;}$$

$$z = -x^2 + y^2 \text{ paraboloide iperbolico o a sella,}$$

il cui grafico, mediante una rotazione attorno all'asse z di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario,

va a coincidere col grafico di $z = xy$.

10. Data $f(x,y) = (x+y+1)(x-y+1)$ determinarne i punti stazionari (o critici) e la loro natura (cioè se sono di minimo, di massimo relativo o di sella), verificando i risultati ottenuti in un modo diverso da quello che usa la matrice hessiana (con un ragionamento sul grafico, sugli insiemi di livello) (esercizio 11.12 del testo).

11. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x,y) = xe^{xy}$ (esempio 11.16 del testo).

12. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x,y) = axy - x^3y - bxy^3 = xy(a - x^2 - by^2)$, $a, b > 0$ (esempio 11.15a del testo).

13. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x,y) = e^x(x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y)$ (esercizio 11.15b del testo).

14. Esercizio proposto: data $f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + (x^2-1)y^2$ determinarne i punti stazionari (o critici) e la loro natura (cioè se sono di minimo, di massimo relativo o di sella), tenendo conto che è simmetrica rispetto ai piani coordinati xz ed yz.

15. Esercizio proposto: data $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$ determinarne i punti stazionari (o critici) e la loro natura (cioè se sono di minimo, di massimo relativo o di sella).

16. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che $f(x,y) = kx^2 + 6xy + y^2$ abbia un minimo nell'origine.

17. Determinare i punti critici e di estremo locale di $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$ con lo studio della funzione $g(s) = \frac{s}{1+s^2}$, e ricavando da quest'ultimo il grafico di f (esercizio 11.11 del testo).

18. Data $f(x,y,z) = xy+xz+yz$ determinarne i punti stazionari (o critici) e la loro natura (cioè se sono di minimo, di massimo relativo o di sella), calcolando gli autovalori della matrice hessiana, che in questo caso è una matrice 3×3.

19. Esercizio proposto: fare lo stesso con $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + x(y^2+z^2-1)$.

4.5 Settimana 10-15/05/10. Par. 11.7, 13.1, 13.2

4.5.1 Mercoledì 12/05/10

46-48

1. Dimostrazione del Lemma 4.4.1.

2. Derivabilità e differenziabilità delle funzioni di piú variabili, matrice Jacobiana.

3. Differenziabilità delle funzioni combinate, regola della catena.
   Esercizio (regola pratica della catena). Date $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definite rispettivamente da
   $$\begin{aligned} y_i = &\ f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad i = 1, \ldots, m \\ z = &\ g(y_1, \ldots, y_m) \quad , \end{aligned}$$
   si vede facilmente che $h \equiv g \circ f$ è definita da
   $$z = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$
   Verificare che il teorema sulla matrice jacobiana della composizione porta al seguente risultato
   $$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\mathbf{x}))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(\mathbf{y})\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$
   La seconda scrittura, è una convenzione usata nelle applicazioni efficace come regola mnemonica. La regola della catena si ottiene semplicemente scrivendo, mediante la sommatoria, il prodotto righe per colonne fra matrici; si faccia attenzione a quali sono gli indici uguali e a quali di essi sono ripetuti.

4. Trasformazioni in $\mathbb{R}^n$, cioè $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, determinante Jacobiano. Teorema di invertibilità locale (Teorema 13.1). Cambiamenti di coordinate.

Esercizi 4.5.1. *1. Fare tutti gli esempi e gli esercizi del testo sugli argomenti svolti.*

2. Studiare, al variare di $a, b \in (0 + \infty)$, i seguenti grafici $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (paraboloide ellittico) e $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ (paraboloide iperbolico o a sella). Determinando in particolare concavità convessità, eventuali massimi e minimi locali e globali, linee di livello e se sono figure di rotazione intorno all'asse z.

3. Verificare la regola gella catena per $f \circ \gamma$ e per $\gamma \circ f$, dove f e γ sono rispettivamente definite da
$$w = x^2 - y^2 - z^2\,, \qquad \begin{cases} x = & \cos(t) \\ y = & \sin(t) \\ z = & t \end{cases}$$

4. Sia f la funzione definita da
$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Usando le coordinate polari, verificare che f non è continua nell'origine

(b) Verificare, usando la definizione, che le derivate parziali di f esistono e sono nulle nell'origine

(c) Calcolare le derivate parziali di f e dedurne che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(d) Considerare la trasformazione (coordinate polari) Ψ definita da
$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\varphi) \\ y = & \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$
e calcolare la matrice jacobiana di $f \circ \Psi$ sia direttamente, sia col prodotto delle matrici jacobiane, sia con la regola della catena. Porre attenzione a come è definita $f \circ \Psi$ e all'insieme in cui è differenziabile.

5. *Considerare la funzione definita da* $f(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2$. *Usare un opportuno cambiamento di coordinate lineare (quale?) per stabilire che il suo grafico è un paraboloide ellittico, iperbolico oppure un cilindro (con base una parabola). Il grafico potrebbe anche essere un piano, in che caso?*

6. *Considerare le funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x,y) = 2y\cos(xy) - x\,, \quad 2\sin(2x+y) - x\,.$$

   a. *Determinare le derivate parziali.*
   b. *Determinare la direzione di massima pendenza della funzione nell'origine.*
   c. *Determinare il polinomio di McLaurin di grado 4 e 5.*
   d. *Dedurre dal precedente punto l'equazione del piano tangente al grafico nel punto* $(0,0,f(0,0))$ *e la matrice Hessiana di* f *nell'origine.*
   e. *Dedurre dal precedente punto se l'origine e' un punto stazionario. In caso affermativo dedurre, se possibile, se sia un punto di sella o un minimo o massimo locale.*

7. *Considerare le funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x,y) = e^{xy} - \cos(x^2) - y^2 + y\sin(x) + 1\,, \quad xe^{xy} - \cos(x) + y^2 - \sin(x) + 1.$$

   a. *Determinarne il polinomio di McLaurin di grado 2.*
   b. *Dedurre dal precedente punto se l'origine e' un punto stazionario. In caso affermativo dedurre, se possibile, se sia un punto di sella o un minimo o massimo locale.*
   c. *Determinare il polinomio di McLaurin di grado 4 e 5.*

4.5.2 Venerdì 14/05/10. Lezioni tenute dal Dott. Bussoli.

49-50 Esercizi, fra cui coordinate cilindriche e sferiche nello spazio (Par. 14.4.2).

1. Data la curva in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \gamma :&\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ & t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t)), \end{aligned}$$

   $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, e la funzione scalare di n variabili

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned}$$

   $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, calcolare la matrice jacobiana di $f \circ \gamma$ sia direttamente sia col prodotto delle matrici jacobiane di f e di γ (regola della catena) e vedere se questa può avere determinante $\neq 0$ perchè $f \circ \gamma$ sia localmente invertibile; poi calcolare la matrice jacobiana di $\gamma \circ f$ sia direttamente sia col prodotto delle matrici jacobiane di γ e di f e verificare che questa ha determinante sempre $= 0$ e quindi $f \circ \gamma$ non è invertibile in nessun aperto di $\mathbb{R}^n$.

2. Data la curva

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = & \cos(t) \\ y(t) = & \sin(t) \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z(t) = & t \end{cases}$$

   e la funzione scalare $w = f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, fare quanto richiesto nell'esercizio precedente.

3. Cambiamento di coordinate nello spazio: coordinate cilindriche di centro (x_0, y_0, z_0):

$$\Psi(\rho,\varphi,z') : \begin{cases} x = & x_0 + \rho\cdot\cos(\varphi) \\ y = & y_0 + \rho\cdot\sin(\varphi) \\ z = & z_0 + z' \end{cases} \quad ;$$

   Matrice jacobiana della trasformazione Ψ, suo determinante e aperto massimale (cioè il più grosso aperto) del dominio dove Ψ può essere invertita.

4. Cambiamento di coordinate nello spazio: coordinate sferiche di centro $(0, 0, 0)$:

$$\Psi(r,\varphi,\vartheta) : \begin{cases} x = & r\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\varphi) \\ y = & r\cdot\sin(\vartheta)\cdot\sin(\varphi) \\ z = & r\cdot\cos(\vartheta) \end{cases} \quad ;$$

   Matrice jacobiana della trasformazione Ψ, suo determinante e aperto massimale (cioè il più grosso aperto) del dominio dove Ψ può essere invertita.

5. Esercizio proposto: dati $F(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ e $G(t) = (t,t)$ calcolare $\frac{d(F\circ G)}{dt}$ e $J_{G\circ F}$ (cioè le matrici jacobiane di entrambe le composizioni) sia direttamente sia con la regola della catena (cioè facendo il prodotto tra le matrici delle singole funzioni), nei punti in cui la composizione è definita.

6. Esercizio proposto: dati $F(x,y) = \ln(x^2-y^2)$ e $G(t) = (\sqrt{1+t^2}, t)$ calcolare $\frac{d(F\circ G)}{dt}$ e $J_{G\circ F}$ (cioè le matrici jacobiane di entrambe le composizioni) sia direttamente sia con la regola della catena (cioè facendo il prodotto tra le matrici delle singole funzioni), nei punti in cui la composizione è definita.

4.6 Settimana 17-22/05/10. Cap. 13

4.6.1 Mercoledí 19/05/10

51-53

1. Il problema della funzione implicita.

2. Funzioni implicite: caso lineare e caso non lineare: Teorema della funzione implicita o del Dini (Teorema 13.2 solo con m=1).

3. Insiemi di livello

4. Curve di livello, loro rette tangenti e approssimazione locale, Par. 13.1.3.
   Approssimazione locale delle curve di livello: regola pratica. Sia f una funzione di due variabili di classe $C^k(X)$, X aperto, e sia $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in X$. Se $\partial_y f(P_0) \neq 0$, è definita implicitamente la funzione $y = \varphi(x)$ da

$$f(x,\varphi(x)) \equiv 0 \tag{4.1}$$
$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{4.2}$$

   Per ottenere la derivata della funzione implicita si deriva, usando la regola della catena, l'equazione (4.1), ottenendo

$$\partial_x f(x,\varphi(x)) + \partial_y f(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0. \tag{4.3}$$

Dall'equazione (4.3), usando (4.2) si ottiene

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}. \tag{4.4}$$

Derivando l'equazione (4.3) si ottiene

$$\partial^2_{xx} f(x, \varphi(x)) + 2\partial^2_{xy} f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \partial^2_{yy} f(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi''(x) \equiv 0.$$

Da questa, usando (4.2) e (4.4), si ottiene

$$\varphi''(x_0) = -\frac{(1, \varphi'(x_0))H_f(x_0, y_o)\binom{1}{\varphi'(x_0)}}{\partial_y f(x_0, y_0)}.$$

Continuando si possono calcolare le derivate successive e quindi l'approssimazione di Taylor di ordine k della funzione φ.

Esercizio. Ripetere il ragionamento precedente per la funzione implicita $x = \psi(y)$ che si può definire nel caso che $\partial_x f(P_0) \neq 0$.

5. Superfici di livello, loro piani tangenti e approssimazione locale, Par. 13.1.4.
Esempio: altre quadriche riferite agli assi (superfici di livello di funzioni di tre variabili).

   (a) Sfera e ellissoide (matrice hessiana definita positiva).

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   (b) Iperboloide a una falda e iperboloide a due falde (matrice hessiana non definita).

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Esercizi 4.6.1. *1. Fare tutti gli esercizi e gli esempi del paragrafo 13.1.3 e 13.1.4. Inoltre, delle curve e delle superfici di livello considerate, determinare l'approssimazione del secondo ordine e dedurne l'andamento locale del grafico.*

2. Studiare gli insiemi di livello e le curve di livello in vari punti delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (x + 3)(y - 1), \quad \ln(xy) - 2x + y.$$

In particolare in quali punti gli insiemi di livello non sono curve di livello?

3. Calcolo della direzione di massima crescita (decrescita) in un punto critico.

4. Cambiamento di coordinate nello spazio: coordinate sferiche di centro $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = & x_0 + r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = & y_0 + r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = & z_0 + r\cos(\theta) \end{cases}$$

Determinare la matrice jacobiana della trasformazione Ψ, suo determinante, insieme di invertibilità locale e aperto massimale (cioè il più grosso aperto) del dominio dove Ψ può essere invertita.

4.6.2 Venerdí 21/05/10. Lezioni tenute dal Dott. Bussoli.

54-55. Esercizi.

1. Teorema della funzione implicita per funzioni di due o tre variabili; approssimazione locale con lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine (con una variabile; formula della derivata seconda con la matrice hessiana) o fino al primo (con due variabili).

2. Verificare che $x^5 + x^2y^3 + y^4 = 1$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ nell'intorno del punto $P = (0, 1)$; scrivere il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione φ intorno a $x = 0$; fare il disegno.

3. Verificare che $x^5 + x^2y^3 + y^4 = 1$ definisce implicitamente una funzione $x = \phi(y)$ nell'intorno del punto $Q = (1, -1)$; scrivere il polinomio di Mac Laurin del secondo ordine della funzione ϕ intorno a $y = -1$; fare il disegno.

4. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di livello di $f(x, y) = x^3 - 3xy^5 - 2y$ nel punto $(2, 1)$ (esercizio 13.4a) del testo).

5. Esercizio proposto: determinare l'equazione della retta tangente alla curva di livello di $(x - y) \cdot ln(e + xy - x^2 + 2y^2) - 1$ nel punto $(2, 1)$ (esercizio 13.4b) del testo).

6. Disegnata la curva $y^2 - 4x^2 + 4x^4 = 0$, vedere in quali punti non si può applicare il teorema della funzione implicita.

7. Esercizio proposto: determinare e disegnare gli insiemi di livello (che, per la maggior parte dei valori di f, saranno curve di livello) di $f(x, y) = (x + 3)(y - 2)$ (per la maggior parte dei valori di f saranno curve di livello) e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.

8. Esercizio proposto: determinare e disegnare gli insiemi di livello di $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 4$ e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.

9. Esercizio proposto: determinare e disegnare gli insiemi di livello di $f(x, y) = x - (y - 3)^2$ e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.

10. Studiare, in un intorno di $(0, 1, 0)$, la superficie $x^3 + ye^{2z} + \sin(xyz) = 1$ (esempio 13.6 del testo).

11. Dire se $(0, 0, 2)$ è un punto regolare dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x^5 + y^2z = 0\}$ ed in questo caso determinarne il piano tangente in $(0, 0, 2)$ (esercizio 13.6a) del testo).

12. Dire se $(0, 0, 2)$ è un punto regolare dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = z \cdot \arctan(xy) - z + 2 = 0\}$ ed in questo caso determinarne il piano tangente in $(0, 0, 2)$ (esercizio 13.6c) del testo).

13. Esercizio proposto: dire se $(0, 0, 2)$ è un punto regolare dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = z \cdot e^x + y\ln(z) - 3x\cos(y) - 2 = 0\}$ ed in questo caso determinarne il piano tangente in $(0, 0, 2)$ (esercizio 13.6a) del testo).

14. Esercizio proposto: determinare e disegnare gli insiemi di livello di $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (per la maggior parte dei valori di f saranno superfici di livello)e vedere se si può sempre applicare il teorema della funzione implicita.

4.7 Settimana 24-29/05/10

4.7.1 Mercoledí 26/05/10

56-58.

1. Estremi vincolati di funzioni di due variabili: il metodo delle curve di livello e del moltiplicatore di Lagrange (con dimostrazione), Par. 13.2.
2. Ricerca degli estremi di una funzione di due variabili su insiemi compatti, Par. 13.3.
3. Cenni sulla ricerca degli estremi vincolati delle funzioni di tre variabili, Par. 13.4.

Esercizi 4.7.1. *1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 - y^2$*

a. Disegnare gli insiemi di livello e le linee di livello di f.

b. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolata a $x^2/4 + y^2/9 = 1$ e calcolarli.

c. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolata all'insieme $x^2/4 + y^2/9 \leq 1$ e calcolarli. Illustrare quanto fatto con un disegno.

d. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (1, 1)$.

e. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (e^t, t)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1, 1)$.

f. Calcolare il piano tangente al grafico $z = f(x, y)$ nel punto $P = (1, -2, -3)$.

g. In quali punti di quali insiemi di livello di f non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a. Determinare l'insieme in cui f e' differenziabile.

b. Discutere la limitatezza e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).

c. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (1, 1)$.

d. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, t^2)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1, 1)$.

e. Calcolare la retta tangente alla curva di livello $f(x, y) = 0$ nel punto $P = (1, 1)$.

f. Enunciare il teorema della funzione implicita per la curva di livello $f(x, y) = 0$ nel punto $P = (1, 1)$ e dedurne il grafico vicino a $P = (1, 1)$.

g. Quali sono i punti di $f(x, y) = 0$ in cui non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

a. Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$ e dare la definizione di $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$.

b. Discutere l'esistenza di massimo e minimo della funzione nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2 e nel cerchio aperto.

c. *Discutere la limitatezza di f e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).*

d. *Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (0, 0)$ e il piano tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, -1, 0)$.*

e. *Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (1 - t, 1 - t^2)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (0, 0)$.*

f. *Calcolare il polinomio di Taylor del secondo ordine di f centrato nell'origine.*

g. *Enunciare le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti affinche' un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sia un massimo o un minimo locale per f. Determinare i punti stazionari della f e studiarli.*

4. *Data la funzuine definita da $f(x, y, z) = z^2 + \cos(z) - xy$, determinare in quali punti dell'insieme di livello $f(x, y, z) = 1$, l'insieme è una superficie di livello, cioè è possibile definire localmente una funzione implicita. Dopo aver verificato che il punto $P_0 \equiv (0, 1, 0)$ è uno di tali punti si determini il piano tangente alla superficie di livello (cioè al grafico della funzione implicita) e l'approssimazione del secondo ordine di tale funzione.*

5. *Determinare i punti stazionari della funzione definita da $f(x, y, z) = x^2 - z^2 + y$ vincolata a $g(x, y, z) = z - xy = 0$, sia col metodo del moltiplicatore di Lagrange, che con la parametrizzazione $z = xy$.*

6. *Giustificare l'esistenza del massimo e del minimo della funzione definita da $f(x, y, z) = xy + z$ sugli insiemi S e B, rispettivamente definiti da $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Calcolare tali valori e dove vengono raggiunti.*

4.8 Settimana 31/05/10 - 5/06/10

4.8.1 Martedí 1/06/10

59-60. Esercizi e ricevimento studenti

4.8.2 Venerdí 4/06/10 - lezioni tenute dal dott.Bussoli

61-62. Esercizi.

1. Disegnare nel piano la curva di livello 1 della funzione $g(x, y) = x \cdot y$, cioè l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$, vedere se si può applicare in tutti i suoi punti il teorema della funzione implicita, e vedere se $f(x, y) = x^2 - y^2$ ammette massimo e minimo assoluti sul vincolo E (sia col metodo dei moltiplicatori di Lagrange,sia con la parametrizzazione del vincolo,sia con le curve di livello).

2. Vedere se sul vincolo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la funzione $f(x, y) = x - y^2$ ammette massimo e minimo assoluti e perchè, e se sì calcolarli (sia col metodo dei moltiplicatori di Lagrange,sia con la parametrizzazione del vincolo in coordinate polari,sia con la sostituzione $y^2 = 1 - x^2$,sia con le curve di livello).

3. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = 4 - x - y$ nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ e calcolarli.

4. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = e^{y^2 - x^2}$ nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, x^2 - y^2 \leq 0, x^2 - y - 4 \leq 0\}$ e calcolarli.

5. Determinare i punti di estremo di $f(x, y) = y^2 - 5x^2$ vicolati a Γ = triangolo di vertici $(0, 1), (0, 2), (1, 3)$ (esercizio 13.8b del testo).

6. Correzione di un esercizio proposto: sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x, y) = y^{2x}$ attorno al punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ fino al terzo ordine compreso, sia con l'uso degli sviluppi in serie di Mac Laurin già noti per funzioni di una variabile, sia col calcolo esplicito delle derivate parziali.

7. Esercizio da un testo d'esame: determinare e disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \leq 3, |x - y| \leq 7\}$, giustificare l'esistenza di massimo e minimo assoluti di $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x$ e calcolarli (conviene usare le curve di livello).