Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica I
Registro delle lezioni del primo semestre
A.A 2009/2010

Gianna Stefani

Indice

Capitolo 1

Introduzione

In questo file sono riportati gli argomenti delle lezioni del primo semestre, cioè le lezioni sul calcolo differenziale delle funzioni reali di una variabile reale ed alcune generalità sulle equazioni differenziali, incluso il concetto di primitiva di una funzione ed alcuni metodi per il calco;o delle primitive.

Il file è organizzato come un registro delle lezioni in forma di libro ed è diviso per argomenti (capitoli, ad esempio: Introduzione, Elementi di base), per settimane di lezione (sezioni, ad esempio: Settimana 14-19/09/09) e per giorni (sottosezioni, ad esempio: Mercoledi' 16/09/09). Per ogni settimana, nel titolo della sezione, sono indicati i paragrafi (Par.) del testo di riferimento in cui si trovano gli argomenti svolti. Le lezioni sono indicate con un numero progressivo in grassetto.

Di seguito diamo ulteriori informazioni.

- Il registro delle lezioni *va inteso anche come un programma d'esame dettagliato.*
- Sono riportati nei dettagli tutti gli argomenti svolti a lezione la cui impostazione differisce in modo sostanziale da quella del testo di riferimento. Negli altri casi, il più delle volte, ci limitiamo semplicemente ad elencare gli argomenti trattati in aula.
- Gli argomenti senza citazioni sono svolti nel testo di riferimento (e in tutti i testi di Analisi Matematica)
- Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo di riferimento.
- Saranno proposti esercizi anche non svolti a lezione. *Ulteriori esercizi saranno proposti in un file a parte.*
- *Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali errori*

1.1 Testo di riferimento

Contiene tutti gli argomenti del corso.

• Bertsch - Dal Passo - Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw-Hill.

1.2 Altri testi consigliati

Per gli argomenti del primo semestre consigliamo anche:

- Giaquinta - Modica, *Note di Analisi Matematica: Funzioni di una variabile* , Pitagora.

- Adams, *Calcolo Differenziale 1* , Ambrosiana.
- Bramanti, Pagani, Salsa, *Matematica: Calcolo infinitesimale e Algebra lineare*, seconda edizione, Zanichelli.
- Bramanti - Pagani - Salsa, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli.
- Anichini - Conti, *Calcolo 1: Funzioni di una variabile*, Pitagora.

L'elenco non è esaustivo, si può usare un qualsiasi testo di Analisi Matematica I, usando il registro delle lezioni come indice degli argomenti.

1.3 Testi di esercizi e prerequisiti

Diamo un elenco, non esaustivo, di libri di esercizi e prerequisiti. La maggior parte dei prerequisiti sono contenuti anche in ogni testo di Analisi Matematica I

- Benevieri, *Esercizi di Analisi Matematica 1*, De Agostini.
- Salsa - Squellati, *ESERCIZI di MATEMATICA 1, calcolo infinitesimale e algebra lineare* - Zanichelli
- Marcellini - Sbordone, *Esercitazioni di Matematica 1* , Liguori.
- Boieri - Chiti, *Precorso di Matematica*, Zanichelli.
- Malafarina , *Matematica per i precorsi*, McGraw Hill.

Capitolo 2

Elementi di base

2.1 Settimana 14-19/09/09. Par. 1.1,1.2

2.1.1 Mercoledi' 16/09/09

1. Numeri naturali, interi, razionali, reali, notazioni insiemistiche, quantificatori (prerequisiti). Noi useremo le seguenti notazioni

$$x \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Somma prodotto e proprietà (prerequisiti).
Rappresentazione dei razionali positivi come allineamenti decimali finiti o periodici
Rappresentazione degli irrazionali positivi come allineamenti decimali infiniti non periodici
Relazione d'ordine ($<, \leq$) e sue proprietà (prerequisiti).
Il valore assoluto di un numero reale e le sue proprietà, notazione: $|x| = \mathrm{abs}(x) \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$
Proprietà di densità e di Archimede.

Osservazione. Tutte le proprieà fin qui menzionate sono soddisfatte anche da $\mathbb{Q}$.

2. Maggioranti (minoranti), massimo (minimo) di un insieme, insiemi limitati e illimitati.
Estremo superiore (inferiore) di un insieme
Proprieta' di completezza (o di continuità) dei numeri reali.
La retta reale.
Definizione di radice n-sima di un numero reale, esempio $\sqrt{x^2} = |x|$

Esercizi 2.1.1. 1. *Dimostrare che il punto medio di due numeri reali, x, y, è dato da $\frac{x+y}{2}$. Si consiglia di usare la nozione di valore assoluto.*

2. *(Facoltativo). Dimostrare che: $\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} = \inf\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \geq 2\}$.*

3. *Analisi (cioè analizzare le relazioni ed il significato) e dimostrazione (facoltativa) delle proposizioni*

   (a) *$\sqrt{2}$ non è razionale*
   (b) *$\nexists x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$*
   (c) *$\nexists x \in \mathbb{Q}, x > 0$ tale che $x^2 = 2$*
   (d) *$x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$*
   (e) *$\mathbb{Q}$ non è completo*

2.1.2 Venerdi' 18/09/09

3. Gli intervalli come soluzioni di disequazioni lineari.
Intervalli limitati di estremi $a < b$:
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Intervalli illimitati
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ semiretta negativa aperta
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ semiretta negativa chisa
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ semiretta positiva aperta
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ semiretta positiva chiusa
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$ retta reale

Intervalli degeneri: $\emptyset = (a, a) = [a, a) = (a, a]$, $\{a\} = [a, a]$.

Proposizione 2.1.1. *(senza dimostrazione). Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se per ogni $a, b \in I$, $a \leq b$ l'intervallo chiuso $[a, b]$ è contenuto in I.*

Lunghezza o misura di un intervallo limitato.
Definizione di distanza (par 4.1, pg.73) e sue proprietà.
Definizione di intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $r > 0$ (par 4.1, pg.74), notazioni:

$$B_r(x_0) = I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

Rappresentazione degli intervalli in termini di distanza.

Segno di un numero reale x, notazione $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

4. Definizione operativa di estremo superiore (inferiore per esercizio):
sia $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ M \in \mathbb{R}$,

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq a, & \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A\ t.c.\ M - \epsilon < a(\leq M) \end{cases}$$

Esercizi 2.1.2. 1. *Verificare che:* $|x| = \sqrt{x^2} = x\, sgn(x) = \max\{x, -x\}$.

2. *Determinare estremi superiore, inferiore, max, min, degli intervalli.*

3. *Provare le seguenti proprietà del valore assoluto:*
   - $|a| \geq 0$
   - $|ab| = |a||b|$
   - $|a + b| \leq |a| + |b|$
   - $|\,|a| - |b|\,| \leq |a - b|$. *(facoltativo)*

4. *Analisi o/e dimostrazione delle seguenti proposizioni:*

   (a) $M \neq \sup A$

   (b) A *è illimitato*

   (c) $0 = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

   (d) $1/1000 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

   (e) $-1 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

5. *Dimostrare le seguenti proposizioni.*
   $M = \max A \Rightarrow M = \sup A$
   $M = \max A \Leftrightarrow M = \sup A$ *e* $M \in A$
   $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$
   $\exists \max A \Leftrightarrow \sup A \in A$

6. *Enunciare e dimostrare proposizioni analoghe alle precedenti per l'estremo inferiore e il minimo).*

2.2 Settimana 21-26/09/09. Par. 2.1, 2.3, 2.5, 3.1.1, 3.1.2.

2.2.1 Mercoledì 23/09/09

5. Definizione di funzione (o applicazione) da un insieme X a un insieme Y dominio, codominio. Notazioni:

$$f : X \to Y \ , \ x \mapsto f(x) \quad \text{oppure} \quad f : x \in X \mapsto f(x) \in Y$$

Immagine, grafico, equazione del grafico di una funzione.
Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione inversa.
Restrizione di una funzione, retroimmagine di un insieme.
Definizione di funzione identità in o su un insieme X, notazione: $I_X : x \in X \mapsto x \in X$.

6. Funzioni reali di una variabile reale: *convenzione sul dominio* (dominio naturale, campo di esistenza). Notazioni: invece di scrivere: " $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1/x$ " scriviamo: " $f : x \mapsto 1/x$ " oppure " f definita da $y = 1/x$ " oppure " f definita da $f(x) = 1/x$ ".
Grafico della funzione valore assoluto e della funzione segno.
Funzioni definite a tratti.
Grafici delle funzioni potenze intere.
Relazioni fra il grafico e dominio, immagine, iniettività, suriettività.
Relazione fra immagine, iniettività, suriettività ed il concetto di soluzione di una equazione.

Esercizi 2.2.1. 1. *Quale dei seguenti insiemi rappresenta il grafico di una funzione reale di variabile reale?* $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\Big\}$, $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\Big\}$.

2. *Scrivere in forma esplicita la funzione* $x \mapsto f(x)$ *il cui grafico è dato da* $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - x = 4,\ y \geq 0\Big\}$ *e determinarne dominio, immagine, iniettività.*

3. *Determinare, usando la definizione, dominio, immagine, suriettività della funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $y = x^2 + 2x + 5$.

4. *Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:* $|x + 4| < |x - 3|$, $x^2 - 4 < 0$, $x^2 \geq 8$, $x^2 \geq -5$, $x^2 \leq -5$.

2.2.2 Venerdì 25/09/09

7. Le potenze.
Ricordare che sono definite:
- a^n, con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$
- $a \neq 0$, $a^0 = 1$, *non si definisce* 0^0
- a^n, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$

• $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, con $a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0, m \in \mathbb{Z}$
• $0^{m/n} = 0$, con $m, n \in \mathbb{N},\ m, n \neq 0$,
• *Attenzione: se $a < 0$ non si definisce $a^{m/n}$*
Cenni sulle potenze ad esponente reale:

$$\begin{cases} a^x = \sup\{a^{m/n} : m/n \in \mathbb{Q}, m/n \leq x\}, & \text{se } a > 1,\ x \in \mathbb{R} \\ a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}, & \text{se } 0 < a < 1,\ x \in \mathbb{R} \\ 1^x = 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Riguardare le proprietà delle potenze e la definizione e le proprietà dei logaritmi.
Grafici delle funzioni radici intere e differenza fra le funzioni $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ e $x \mapsto x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}, n > 0$.
Grafici delle funzioni potenze reali, $x \mapsto x^b$ al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$.
Grafici delle funzioni esponenziali, $\exp_a : x \mapsto a^x$ al variare del parametro $a > 0$, $a \neq 1$.

8. Funzioni invertibili, funzione inversa e suo grafico.
Grafico delle funzioni logaritmiche, $\log_a : x \mapsto a^x$ al variare del parametro $a > 0$, $a \neq 1$.
Le notazioni $\exp = \exp_e$ e $\ln = \log_e$.

Esercizi 2.2.2.

1. *Riflettere sulla differenza fra le parole: variabile, parametro e incognita.*
2. *Determinare dominio, immagine, grafico, eventuale funzione inversa e proprietà delle fuzioni definite da $f(x) = 1/x,\ 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x^2 - 2x$ su $(0, 2)$.*
3. *Al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, determinare dominio, immagine, grafico ed eventuale funzione inversa delle fuzioni definite da $f_b(x) = x^b$.*
4. *Usando la definizione provare che la funzione definita da $f(x) = x^3 - x$ non è iniettiva.*
5. *Usando la definizione provare che la funzione definita da $y = 3x + 2$ è invertibile e determinarne l'inversa.*
6. *Della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 1/x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$, determinare dominio, immagine, grafico ed eventuale funzione inversa.*
7. *Data la funzione $f : x \mapsto x^4 - \frac{3}{4}x^2$, determinanare $f^{-1}((\frac{1}{4}, +\infty))$*
8. *Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e interpretarle in termini di grafici:*
$$\sqrt{x-1} < x - 3,\ \frac{2}{x} + 3 < \frac{4}{x} - 1,\ \frac{3}{x^2} + 1 \leq x^2 - 1,\ \sqrt{x-1} < \sqrt{x},$$
$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} > 3 - x, |x^2 - 4x - 5| > -x,\ \sqrt{-x} < 5 + x.$$
9. *Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:*
1) $x \geq 5$ implica $x^2 > 30$,
2) $x = 0$ se e solo se $x^2 = 0$,
3) $x^3 \geq 8$ implica $x \geq 2$,
4) $x \geq 5$ è equivalente a $x^2 = 25$,
5) $x > 5$ implica $x^2 > 25$,
6) $x^2 > 25$ implica $x > 5$.

2.3 Settimana 28/09 - 03/10/09. Par. 2.2, 2.4, 2.5.1, 2.6, 2.7, 3.1, 3.2, 3.3.

2.3.1 Mercoledì 30/09/09

9. Funzioni pari, dispari, periodiche.
Misura dell'angolo in radianti e funzioni trigonometriche.

Riguardare le formule di trigonometria e i grafici delle funzioni trigonometriche.

Funzioni limitate. Estremo superiore (inferiore) e massimo (minimo) di una funzione. Punti di massimo (minimo).

10. Operazioni con le funzioni: somma, prodotto, quoziente, composizione.
Funzioni composte e loro dominio.
Esempio: date $f : x \mapsto x^2$ e $g : x \mapsto \sqrt{x}$, calcolare dominio, immagine ed equazione del grafico di $f \circ g$ e $g \circ f$.

Ulteriori esempi si hanno considerando le seguenti operazioni sui grafici: confronto fra i grafici di f e

1. $-f$, $|f|$, $x \mapsto f(-x)$.
2. $x \mapsto f(a\,x)$, $x \mapsto b\,f(x)$, con $a, b > 0$, $a, b \leq 0$ per esercizio, (cambiamento di scala).
3. $x \mapsto f(x-a)$, $x \mapsto b + f(x)$, con $a, b > 0, a, b \leq 0$ (traslazioni orizzontali e verticali).

11. La funzione parte positiva $f^+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$

La funzione parte negativa $f^- : x \mapsto \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$

Esercizi 2.3.1. *1. Delle funzioni definite nell'Esercizio 2.2.2 determinare quali sono pari, dispari o periodiche.*

2. Determinare, usando la definizione, immagine, iniettività, suriettività della funzione definita da $f(x) = x^2 + 2x + 5$. Determinare inoltre estremo superiore, inferiore ed eventuali massimo, minimo, punti di massimo, punti di minimo.

3. Delle funzioni definite nell'Esercizio 2.2.2 determinare estremo superiore, inferiore, eventuali massimi e minimi e punti di massimo e di minimo.

4. Date f e g funzioni reali di variabile reale, provare che:

(a) $g = f^{-1} \implies g \circ f = I_{D_f}$ e $f \circ g = I_{D_g}$.
(b) f, g iniettive (suriettive) $\implies g \circ f$ iniettiva (suriettiva)
(c) $g \circ f$ iniettiva $\implies f$ iniettiva
(d) $g \circ f$ suriettiva $\implies g$ suriettiva

5. Scrivere le funzioni ottenute applicando le precedenti operazioni sui grafici alla funzione $f : x \mapsto x^2 - 2x$ e disegnarne i grafici.

6. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 - 2(x-3) + 2 & se \quad x \leq 2 \\ 7/(x+3) & se \quad x > 2 \end{cases}$, e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

7. *Disegnare il grafico della funzione definita da* $f(x) = ||x^2 - 4x| - 2|$, *e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?*

2.3.2 Venerdì 2/10/09

12. Funzioni monotòne e strettamente monotone: crescenti (decrescenti), strettamente crescenti (decrescenti).
Le funzioni trigonometriche inverse.

Definizione 2.3.1.

- *La funzione* arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, *è definita da*
$$\arcsin = (\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]})^{-1}$$
- *La funzione arcos* : $[-1, 1] \to [0, \pi]$, *è definita da*
$$arcos = (\cos_{|[0,\pi]})^{-1}$$
- *La funzione* arctan : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, *è definita da*
$$\arctan = (\tan_{|(-\pi/2,\pi/2)})^{-1}$$

13. Riguardare il grafico delle funzioni trigonometriche inverse.

Esercizi 2.3.2. *Dimostrare che*

1. *La funzione* f *definita da* $f(x) = 1/x$ *non è monotona ma lo è su* $(-\infty, 0)$ *e su* $(0, \infty)$, *cioè lo sono le sue restrizioni a* $(-\infty, 0)$ *e a* $(0, \infty)$
2. *Dimostrare che una funzione strettamente crescente è iniettiva, secondo il seguente schema:*
Ipotesi (Hp)
Tesi (Ts)
Dimostrazione.
3. *Una funzione strettamente crescente (decrescente) è crescente (decrescente), ma il viceversa non vale.*
4. f *è monotona se e solo se il prodotto* $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1))$ *non cambia mai segno, per ogni* x_1 *e* x_2 *nel dominio,. Come posso esprimere in termini analoghi che è strettamente crescente (decrescente)?*
5. *Se* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *è strettamente monotona, allora è anche iniettiva e quindi invertibile.*
6. *La funzione* $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1), \\ 3 - x & x \in [1, 2] \end{cases}$, *è iniettiva ma non è monotona in [0,2].*
7. *Se* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *è strettamente monotona,* f^{-1} *è suriettiva se e solo se* f *è definita in tutto* $\mathbb{R}$.
8. *Date* f *e* g *funzioni reali di variabile reale*
   (a) f, g *monotone (strettamente)* $\implies$ $g \circ f$ *monotona (strettamente), più precisamente:* f, g *crescenti o decrescenti* $\implies$ $g \circ f$ *crescente, e ... completare i casi.*

Capitolo 3

Continuità e derivabilità delle funzioni definite su intervalli

Anche se i concetti di continuità e derivabilità si possono dare per funzioni il cui dominio è un insieme più generale, ho preferito limitarmi al caso più semplice di funzioni definite su intervalli. Naturalmente prenderemo in considerazione anche funzioni il cui dominio è unione disgiunta di intervalli, studiandone le proprità su ciascun intervallo.

Daremo per prima cosa le definizioni di continutà e derivabilità (necessarie al corso di fisica), ritornando in seguito alle proprietà di cui godono le funzioni continue e differenziabili.

L'impostazione da me seguita nell'esposizione del concetto di continuità differisce da quella del testo di riferimento, dove la continuità è trattata dopo i limiti. Fra quelli consigliati, il testo di Giaquinta - Modica segue questa impostazione.

Il legame fra le due impostazioni consiste semplicemente nel fatto che qui viene data direttamente la definizione di $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, invece di passare attraverso la definizione di limite. Riporteremo anche la definizione di $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, per permettere il confronto fra le due impostazioni.

Anche l'impostazione da me seguita nell'esposizione del concetto di derivabilità differisce da quella del testo di riferimento (e da quella di tutti i testi che conosco), dove la derivabilità è trattata mediante il concetto di limite; la mia impostazione segue quella seguita dal Prof.Massimo Furi della nostra Facoltà.

Ritengo questa impostazione, oltre che semplice e molto rigorosa, particolarmente utile nel nostro corso perchè ci permette di arrivare rapidamente al concetto di derivata (necessario al corso di fisica) e rimandare il concetto più delicato di limite.

Il legame fra l'impostazione da me seguita e quella del testo consiste nel fatto che qui viene data la definizione di derivabilità in x_0, dicendo che il rapporto incrementale è estendibile per continuità a x_0.

Avendo a disposizione il concetto di limite per funzioni definite su intervalli, lo studente che lo preferisca, può seguire l'impostazione del testo, purché in sede d'esame sia preparato sugli argomenti richiesti in modo coerente.

L'enunciato dei teoremi e la maggior parte delle dimostrazioni può essere consultata sul testo di riferimento, comunque molti degli argomenti svolti saranno riportati nei dettagli.

3.1 Settimana 5–10/10/08. Par. 7.1,7.2,7.4

3.1.1 Mercoledì 7/10/09

14. Intuitivamente, affermare che una funzione f è continua in un punto $x_0 \in D_f$ significa che l'immagine $f(x)$ di un punto x del dominio di f si può rendere vicina quanto si vuole a $f(x_0)$ purché si prenda x sufficientemente vicino a x_0. In altre parole, se ci viene dato un arbitrario margine di errore $\epsilon > 0$ e ci viene chiesto di far sì che la distanza $|f(x) - f(x_0)|$ tra $f(x)$ e $f(x_0)$ risulti minore dell'errore assegnato, deve essere possibile (almeno teoricamente) determinare un intorno $I(x_0, \delta)$ del punto x_0 con la proprietà che per tutti i punti x di tale intorno (che appartengono anche al dominio di f) il valore $f(x)$ approssimi $f(x_0)$ con un errore inferiore ad ϵ.

Definizione 3.1.1. *Una funzione (reale di variabile reale) f si dice* continua in un punto *x_0 del dominio D_f se fissato un arbitrario $\epsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che da $|x - x_0| < \delta$ e $x \in D_f$ segue $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. In formule:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in D_f \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

o anche

$$\forall\ I(f(x_0), \epsilon)\,,\ \exists\ I(x_0, \delta) \quad t.c. \quad f\left(I(x_0, \delta) \cap D_f\right) \subset I(f(x_0), \epsilon).$$

Esempio. Verificare che la funzione $I_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ è continua in $x_0 = 0$.

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$, la disequazione $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ nel presente caso è data da $|x| < \epsilon$, che ha fra le sue soluzioni l'intervallo $I(0, \epsilon/2)$. Cioè dato $\epsilon > 0$ abbiamo trovato $\delta = \epsilon/2$ (ma anche $\delta = \epsilon$, $\epsilon/4, \ldots$ va bene) con le richieste proprietà. □

Esempio. La funzione segno non è continua nel punto $x_0 = 0$.

Dimostrazione. Se scegliamo un intorno di $\mathrm{sgn}(0) = 0$ di raggio $\epsilon = 1/2$, non è possibile trovare un intorno $I(0, \delta)$ di 0 che viene (interamente) mandato in $I(0, 1/2)$. Infatti $I(0, 1/2) \cap Im(f) = \{0\}$. □

Se f non è continua in x_0 si dice che f è *discontinua* in x_0 o che ha una *discontinuità in* x_0.

Se f è continua in ogni punto del suo dominio, allora si dice semplicemente che è una funzione *continua*, altrimenti si dice che è *discontinua*.

Se f è continua in ogni punto di $A \subset D_f$, si dice che è continua in A e si scrive $f \in C^0(A, \mathbb{R})$ o semplicemente $f \in C^0(A)$, se il codominio è noto, come in questa parte del nostro corso.

Osservazione importante. In base alla definizione, f è discontinua se non è vero che è continua in ogni punto del suo dominio; cioè se esiste (almeno) un punto **del dominio** in cui f è discontinua (ricordarsi di come si nega una proposizione). Quindi, a differenza di ciò che si legge in alcuni libri, non ha senso l'affermazione "la funzione $1/x$ non è continua perché ha una discontinuità nel punto $x_0 = 0$", dato che detto punto non appartiene al dominio della funzione (sarebbe come dire che non è vero che tutte le pecore sono bianche perché c'è una capra che non lo è). Invece la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, è discontinua in $x_0 = 0$, qualsiasi sia $a \in \mathbb{R}$.

15 - 16.

Definizione 3.1.2. *Sia I un intervallo, x_0 un punto di I o un suo estremo e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Sia f una funzione definita su I o su $I \setminus \{x_0\}$. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è ℓ e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che da $|x - x_0| < \delta$ e $x \in I \setminus \{x_0\}$ segue $|f(x) - \ell| < \epsilon$.*

Si osservi che la definizione di limite è indipendente dall'eventuale valore che la funzione assume in x_0.

Teorema 3.1.1. *(senza dimostrazione). Ogni funzione ottenuta combinando funzioni continue tramite operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione è continua. Più*

precisamente:
se f è continua in un punto x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ risulta continua in x_0,
se f e g sono continue in x_0, allora $f+g$, fg sono continue in x_0,
se f e g sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è continua in x_0.

Teorema 3.1.2. *(senza dimostrazione). Sia J un intervallo e $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione continua invertibile, allora $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.*

Esempi. Continuità dei polinomi e delle funzioni razionali.
Continuità delle radici n-sime e loro grafici.

Esercizi 3.1.1.

1. *Provare che se una funzione è continua in un intervallo, allora è continua anche la sua restrizione ad un qualunque sottointervallo.*
2. *Provare che le funzioni costanti, la funzione identità, la funzione valore assoluto e la funzione $x \mapsto 1/x$ sono continue.*
3. *Provare che la funzione segno è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*
4. *Mostrare che se due funzioni coincidono in un intorno di un punto x_0 e una di esse è continua in tal punto, anche l'altra lo è.*
5. *Verificare che una funzione definita su un intervallo I è continua in $x_0 \in I$ se e solo se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se e solo se $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$*
6. *Verificare che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0$.*
7. *Dimostrare che se f è continua in un punto x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ risulta continua in x_0.*
8. *Dimostrare che se f e g sono continue in x_0, allora $f+g$ è continua in x_0, usando lo schema : ipotesi, tesi, dimostrazione.*
9. *Siano f e g due funzioni definite nello stesso dominio. Dedurre, dal teorema di continuità delle funzioni combinate, che se una sola delle due è discontinua, allora anche $f+g$ è discontinua.*
10. *Dal teorema sulla continuità delle funzioni combinate dedurre che i monomi $x \mapsto ax^n$ sono funzioni continue.*
11. *Dal teorema sulla continuità delle funzioni combinate dedurre che i polinomi e le funzioni razionali sono funzioni continue.*

3.1.2 Venerdì 9/10/09

17. **Esempi - esercizi.** Continuità delle funzioni trigonometriche, delle funzioni potenze ad esponente reale e delle funzioni esponenziali (senza dimostrazione).
Continuità delle funzioni logaritmiche e delle funzioni trigonometriche inverse, usando il Teorema 3.1.2.

Definizione 3.1.3. *Una funzione f si dice* continua a destra *in $x_0 \in D_f$ se esiste $\delta > 0$ tale che la restrizione $f_{|[x_0, x_0+\delta)}$ è continua in x_0. Analoga definizione vale per la continuità a sinistra.*

Definizione 3.1.4. *Una funzione f definita in $I \setminus \{x_0\}$ si dice* estendibile per continuità *a x_0 se esiste una funzione $\tilde{f}$ definita in I e continua in x_0 che coincide con f in $I \setminus \{x_0\}$*

Esempi. Le potenze a esponente reale $f_b : x \mapsto x^b$, $b > 0$, sono estendibili per continuità a $x_0 = 0$ e **si considerano estese** $x_0 = 0$ **col valore** 0**, cioè** $D_{f_b} = [0, +\infty)$ **e** $f_b(0) = 0$. La funzione $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, è estendibile per continuità a $x_0 = 0$, col valore $f(0) = 1$.

18.

Esercizi 3.1.2. *1. Verificare che la funzione $x \mapsto x^x$ coincide con la funzione $x \mapsto e^{x \ln(x)}$ e dedurre che è continua. Più in generale se f e g sono funzioni reali di variabile reale, verificare che la funzione $x \mapsto g(x)^{f(x)} = e^{f(x) \ln(g(x))}$ è continua.*

2. Usare la relazione

$$\log_a = (\exp_a)^{-1}$$

per determinare le formule del cambiamento di base negli esponenziali e nei logaritmi.

3. Usando la definizione di continuità verificare che se $x_0 \in (a, b) \subset D_f$ allora f è continua in x_0 se e solo se è continua a destra e a sinistra in x_0.

4. Continuità delle funzioni definite a tratti: per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue?

$$x \mapsto \begin{cases} 1/x + k & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 1/x + k & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$$

5. Sia I un intervallo ed f una funzione continua in $I \setminus \{x_0\}$. Verificare che f è estendibile per continuità in x_0 se e solo se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

6. La funzione $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$, è estendibile per continuità a $x_0 = -1$, con quale valore?

7. Disegnare col computer la funzione $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, e controllare graficamente che è estendibile per continuità a $x_0 = 0$, col valore $f(0) = 1$.

3.2 Settimana 12 -17/10/09. Par. 8.1,8.3–8.5

3.2.1 Mercoledì 14/10/09

19 - 21 *In quel che segue, se non altrimenti specificato, si considerano funzioni definite su un intervallo.* Non preciseremo ogni volta che il dominio di una funzione è un intervallo.

Definizione 3.2.1. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in A$. La funzione $r_{x_0} : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, definita da*

$$r_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

si chiama rapporto incrementale *di f nel punto x_0. Se non ci sono ambiguità sul punto, si indica anche con $x \mapsto r(x)$. $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, si chiama* incremento della funzione *(o della variabile dipendente) e il denominatore, $\Delta x = x - x_0$, si dice* incremento della variabile *(o della variabile indipendente).*

Il lemma seguente ci permetterà di dare la definizione di derivata senza usare la definizione di limite, usando invece la nozione di continuità.

Lemma 3.2.1. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in A$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *La funzione r_{x_0} è estendibile per continuità a x_0*
2. *Esiste una funzione $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ continua in x_0 e tale che*
$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall\, x \in A.$$

Dimostrazione. Per esercizio (si noti che φ coincide con r_{x_0} estesa). $\square$

Definizione 3.2.2. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in A$. Si dice che f è* derivabile *in x_0 se esiste una funzione $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ continua in x_0 e tale che*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall\, x \in A.$$

Equivalentemente, si dice che f è derivabile *in x_0 se la funzione rapporto incrementale, r_{x_0}, è estendibile per continuità a x_0. Il numero $\varphi(x_0)$ (che coincide col valore esteso $r_{x_0}(x_0)$) si chiama* derivata *di f in x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli:*

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad D_{x_0}f, \quad Df(x)|_{x=x_0}.$$

Lemma 3.2.2. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $x_0 \in A$. f è* derivabile *in x_0 con derivata $f'(x_0)$ se e solo se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Dimostrazione. Per esercizio. Si noti anche che questo lemma vuol dire che posso dare la definizione di derivata mediante quella di limite. Si consiglia, come utile esercizio di comprensione del linguaggio matematico, di dare la definizione di derivata mediante la nozione di limite e quindi stabilire l'enunciato di un lemma che dia le proprietà del rapporto incrementale e l'esistenza della funzione φ. Si tratta cioè di scambiare i ruoli fra la Definizione 3.2.2 ed il Lemma 3.2.2. $\square$

Una funzione f definita su una unione di intervalli A si dice *derivabile* se è derivabile in ogni punto di A. Quando ciò accade, la funzione $f'\colon A \to \mathbb{R}$ che ad ogni $x \in A$ assegna il numero $f'(x)$ si chiama *derivata* di f. Inoltre se f' è continua su A, si dice che f è di classe C^1 su A e si scrive $f \in C^1(A)$.

Lemma 3.2.3. *Se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0, allora in quel punto è anche continua.*

Dimostrazione. Con l'impostazione scelta, la dimostrazione di questo lemma è particolarmente semplice, infatti, dalla definizione di funzione derivabile segue che

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)\,,$$

dove $\varphi(x)$ è continua in x_0. Di conseguenza $f(x)$ si può esprimere come somma e prodotto di funzioni continue in x_0. $\square$

Esercizio da fare. Riconoscere che il Lemma 3.2.3 potrebbe essere espresso anche mediante le due seguenti proposizioni che sono equivalenti al suo enunciato.

- *La derivabilità è una condizione sufficiente per la continuità.*
- *La continuità è una condizione necessaria per la derivabilità.*

Teorema 3.2.1 (senza dimostrazione)**.** *Per le seguenti funzioni si ha:*

1. *$D(x^n) = nx^{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N},\ n > 0,\ x \in \mathbb{R}.$*

2. $D(x^b) = bx^{b-1}$, $\quad b \in \mathbb{R}$, $\quad x > 0$ *se* $b < 1$, $x \geq 0$ *se* $b > 1$.

3. $D\exp(x) = \exp(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}$

4. $D\sin(x) = \cos(x)$, $\quad D\cos(x) = -\sin(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}$

5. $D\tan(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$, $\quad x \neq \pi/2 + k\pi$

Osservazioni. i. La notazione per le prime due delle precedenti formule non è corretta, ciò dipende dal fatto che non disponiamo di un "simbolo" per le funzioni potenze. La uso per tradizione e per non appesantire la scrittura. In maniera analoga si usa anche scrivere $D(e^x) = e^x$.

ii. La formula n. 2 del Teorema 3.2.1 è valida per $x \in (0, +\infty)$ se $b < 1$ e per $x \in [0, +\infty)$ se $b \geq 1$, dimostrarlo per esercizio.

Esercizio da fare. Usare il n. 2 del Teorema 3.2.1 per provare

$$D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

e determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è valida l'uguaglianza.

Teorema 3.2.2. *Ogni funzione ottenuta combinando funzioni derivabili tramite operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione è derivabile. Più precisamente:*

- *se f e g sono due funzioni derivabili in x_0, allora lo sono anche $f+g$, fg e risulta* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)) + g'(x_0)$ *e* $(fg)'(x_0)) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0))g'(x_0)$,
- *se f e g sono due funzioni derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, allora lo è anche f/g e risulta* $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$,
- **regola della catena***, se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e risulta* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Dimostrazione(facoltativa). La dimostrazione è riportate nell'esercizio 3.2.2 n. 8

Esercizi 3.2.1. 1. *Provare che se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è costante, allora è derivabile e $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

2. *Provare che la funzione definita da $f(x) = x$ è derivabile e si ha $f'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

3. *Provare che la funzione definita da $f(x) = x^2$ è derivabile e calcolarne la derivata.* Suggerimento. *Partire dall'uguaglianza:* $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$, $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

4. *Provare che la funzione definita da $f(x) = x^n$ è derivabile e calcolarne la derivata.* Suggerimento. *Partire dall'uguaglianza*
$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1}).$$

5. *Provare che le funzioni definite da $f(x) = |x|$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{|x|}$ non sono derivabili in $x_0 = 0$*

6. **Guardare sul testo la tabella delle derivate e gli esempi relativi.**

3.2.2 Venerdí 16/10/09

22 - 23

Teorema 3.2.3. *(senza dimostrazione). Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in J$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

cioè

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(x_0)))}.$$

La dimostrazione sarà data nel capitolo sulle proprietà delle funzioni continue.

Esercizio da fare. Usare il teorema sulla derivata della funzione inversa e le regole di derivazione date nel Teorema 3.2.1 per stabilire le seguenti formule di derivazione, determinando anche per quali $x \in \mathbb{R}$ sono valide.

1. $D\ln(x) = \frac{1}{x}$.
2. $D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. $D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, e $D\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, .

Le derivate delle funzioni "elementari" vanno sapute a memoria e lo studente è tenuto ad esercitarsi sulle regole di derivazione.

Esercizi 3.2.2. *1. Dalle derivate delle funzioni* sin *e* cos *dedurre la derivata della funzione* tan.

2. Determinare $D(\sqrt{x})$ e $D(\sqrt[3]{x})$ specificando per quali x sono valide.

3. Determinare la derivata dei polinomi e delle funzioni razionali

4. Calcolare la derivata della funzione $f : x \mapsto x^x$ e più in generale della funzione $x \mapsto g(x)^{f(x)}$

5. Calcolare $D(a^x)$ e $D(\log_a(x))$, $a > 0\,,\ a \neq 1$.

6. Calcolare la derivata in $y_0 = 2$ della funzione inversa di $f(x) = \ln(x) + 2x$.
Svolgimento *Poichè f è strettamente crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$ ed è superiormente illimitata, esiste la sua funzione inversa con dominio che contiene $\mathbb{R}^+$ (perché posso fare queste affermazioni?). Dal teorema precedente si ha*

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1/x_0 + 2},$$

dove $x_0 = f^{-1}(2)$. Occorre quindi trovare x_0, cioè risolvere l'equazione $f(x) = 2$. In generale un'equazione del tipo $f(x) = y_0$ si risolve con metodi numerici, ma nel nostro caso si vede subito che $x_0 = 1$ è l'unica soluzione dell'equazione $\ln(x)+2x = 2$ (l'unicità dipende dalla stretta crescenza di f). Pertanto

$$(f^{-1})'(2) = 1/3\,.$$

7. Data la funzione definita da $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + \sin(\pi x)}{\sqrt{1 - x^2}}}$, determinare dominio e insieme in cui è continua. Inoltre stabilire per quali punti è applicabile la regola della catena e determinare la funzione derivata.

8. *Dimostrazione del Teorema 3.2.2.*
(Somma) *Fissato* $x_0 \in D(f+g)$*, per ipotesi si ha*

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad e \quad g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0),$$

con φ *e* ψ *continue in* x_0*. Quindi... (esercizio)*
(Prodotto) *Fissato* $x_0 \in D(fg)$*, per ipotesi si ha*

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad e \quad g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0),$$

con φ *e* ψ *continue in* x_0*. Quindi*

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \Big(\varphi(x)g(x_0) + f(x_0)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0)\Big)(x - x_0).$$

Pertanto $(fg)(x) - (fg)(x_0) = \alpha(x)(x - x_0)$*, dove la funzione*

$$\alpha(x) = \varphi(x)g(x_0) + f(x_0)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0)$$

è continua in x_0 *(essendo espressa tramite somma e prodotto di funzioni continue in* x_0*). Questo prova che* fg *è derivabile in* x_0 *e*

$$(fg)'(x_0) = \alpha(x_0) = \varphi(x_0)g(x_0) + f(x_0)\psi(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(Quoziente) *Fissato un punto* x_0 *nel dominio di* $1/g$*, è sufficiente provare che se* g *è derivabile in* x_0*, allora lo è anche* $1/g$ *e*

$$(1/g)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

La derivata del rapporto f/g *si ottiene applicando la regola precedente al prodotto di* f *con* $1/g$*. Per ipotesi si ha* $g(x) - g(x_0) = \psi(x)(x - x_0)$*, con* ψ *continua in* x_0*. Quindi*

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0) = \alpha(x)(x - x_0),$$

Poiché la funzione

$$\alpha(x) = -\frac{\psi(x)}{g(x)g(x_0)}$$

risulta continua in x_0 *(essendo quoziente di funzioni continue),* $1/g$ *è derivabile in* x_0 *e la sua derivata è*

$$(1/g)'(x_0) = \alpha(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

(Composizione) *Fissiamo un punto* x_0 *nel dominio di* $g \circ f$ *e supponiamo che* f *sia derivabile in* x_0 *e che* g *sia derivabile in* $y_0 = f(x_0)$*. Per ipotesi si ha*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall\, x \in D(f), \\ g(y) &= g(y_0) + \psi(y)(y - y_0), \quad \forall\, y \in D(g), \end{aligned}$$

dove $\varphi\colon D_f \to \mathbb{R}$ *e* $\psi\colon D_g \to \mathbb{R}$ *sono due funzioni continue nei punti* x_0 *e* y_0*, rispettivamente. Osserviamo ora che se* x *appartiene al dominio di* $g \circ f$*, il numero* $f(x)$ *sta necessariamente nel dominio* D_g *di* g *(in base alla definizione di dominio di una composizione). Quindi, la seconda uguaglianza, dato che è valida per ogni* *numero* y *in* $D(g)$, *resterà valida anche sostituendo* $f(x)$ *al posto di* y. *Dunque, tenendo conto che* $f(x_0) = y_0$, *si ottiene per ogni* $x \in D_{g \circ f}$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = [\psi(f(x))\varphi(x)]\,(x - x_0)\,.$$

Questo prova che $g \circ f$ *è derivabile in* x_0, *visto che* $\psi(f(x))\varphi(x)$ *è continua in* x_0 *essendo composizione e prodotto di funzioni continue (infatti* f *e* φ *sono continue in* x_0 *e* ψ *in* $y_0 = f(x_0)$*). Pertanto*

$$(g \circ f)'(x_0) = \psi(f(x_0))\varphi(x_0) = \psi(y_0)\varphi(x_0) = g'(y_0)f'(x_0),$$

e la tesi è dimostrata. □

Capitolo 4

Proprietà delle funzioni continue definite su intervalli

In questo capitolo diamo i teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Se non specificato diversamente le funzioni si considerano definite su intervalli, la teoria sarà poi applicata alle funzioni definite su unioni disgiunte di intervalli.

4.1 Settimana 19-24/10/09. Par. 7.3 - 7.5.

4.1.1 Mercoledì 21/10/09

24 - 26.

Teorema 4.1.1 (della permanenza del segno per funzioni continue)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in un punto $x_0 \in A$. Se $f(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ di x_0 tale che per tutti i punti x di tale intorno (e appartenenti al dominio di f) il numero $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$, cioè $f(x)f(x_0) > 0$ per ogni $x \in I(x_0, \delta) \cap A$.*

Dimostrazione. Senza perdere in generalità si può supporre $f(x_0) > 0$ (in caso contrario basta considerare la funzione $g(x) = -f(x)$). Fissiamo $\epsilon = f(x_0)$. Per l'ipotesi di continuità esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ tale che

$$x \in I(x_0, \delta) \cap A \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon\,.$$

Quindi, in particolare, dato che $\epsilon = f(x_0)$, se $x \in I(x_0, \delta) \cap A$ si ha $f(x) > 0$. $\square$

Teorema 4.1.2 (di esistenza degli zeri)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[a, b]$.*

Dimostrazione (facoltativa). Si può supporre $f(a) < 0$ (e, di conseguenza, $f(b) > 0$), altrimenti basta sostituire f con $-f$.

Definiamo l'insieme $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ e consideriamo il numero $c = \sup X$. Chiaramente $c \in [a, b]$, dato che $a \in X$ e b è un maggiorante per X. Mostriamo che il numero $f(c)$ non può essere né minore di zero né maggiore di zero e, pertanto, non può che essere zero.

Se fosse $f(c) < 0$, si avrebbe $c \neq b$ (avendo supposto $f(b) > 0$) e quindi $c < b$. Allora, per il teorema della permanenza del segno (per funzioni continue), esisterebbe un intervallo $(c, c + \delta)$ contenuto in $[a, b]$ in cui f risulterebbe negativa. Pertanto, a destra di c ci sarebbero dei punti di X, contraddicendo il fatto che c è un maggiorante per X. Quindi il numero $f(c)$ non può essere minore di zero.

Se fosse $f(c) > 0$, si avrebbe $c \neq a$ (dato che $f(a) < 0$) e quindi $c > a$. Esisterebbe allora un sottointervallo $(c-\delta, c)$ di $[a, b]$ in cui f risulterebbe positiva. Pertanto, essendo c

un maggiorante per X, e non essendoci elementi di X tra $c-\delta$ e c, sarebbe un maggiorante anche $c-\delta$, contraddicendo il fatto che c è il più piccolo maggiorante per X. Di conseguenza $f(c)$ non può essere maggiore di zero. $\square$

Esempio. L'equazione $\operatorname{sgn}(x) - 1/2 = 0$ non ha soluzioni (dato che $\operatorname{sgn}(x)$ assume soltanto valori interi), eppure agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione definita da $f(x) = \operatorname{sgn}(x) - 1/2$ ha segno discorde (spiegare l'apparente contraddizione).

Lemma 4.1.1. *Sia f una funzione continua in un intervallo J, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *Se f non si annulla in J allora non cambia segno in J.*
2. *Se f cambia segno in J allora f si annulla in J.*

Inoltre le precedenti proposizioni sono equivalenti al Teorema degli zeri.

Dimostrazione. Per esercizio.

Come conseguenza otteniamo che, se conosciamo tutti gli zeri di una funzione continua su un intervallo, possiamo determinarne il segno testandolo in ciascun intervallo determinato da due zeri successivi.

Esempio. Determinare il segno della funzione f definita da

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 + 3x - 10}.$$

Poichè $P(x) = (x-1)^2(x-3)$ e $Q(x) = (x-2)(x+5)$, la funzione è continua su $(-\infty, -5)$, $(-5, 2)$ e $(2, +\infty)$ e non cambia segno nei seguenti intervalli

$$(-\infty, -5), \quad (-5, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 3), \quad (3, +\infty).$$

Inoltre $P(x)$ cambia segno solo in $x_0 = 3$ e $Q(x)$ cambia segno in $x_0 = -5$ e in $x_0 = 2$.

Poichè $f(0) > 0$ otteniamo che f è posiva in $(-5, 1)$, ma anche in $(1, 2)$ (perchè numeratore e denominatore non cambiano segno in $x_0 = 1$), negativa in $(-\infty, -5)$ e in $(2, 3)$ ed infine positiva in $(3, +\infty)$.

Teorema 4.1.3 (dei valori intermedi)**.** *L'immagine continua di un intervallo è un intervallo, cioè: se $f : J \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in un intervallo, allora l'immagine $f(J)$ di f è un intervallo. Equivalentemente si può affermare che* $(\inf f, \sup f) \subseteq f(J)$.

Dimostrazione (facoltativa). Se $(\inf f, \sup f) = \emptyset$, la funzione è costante ed il risultato è provato. Altrimenti sia $\bar{y} \in (\inf f, \sup f)$. Per definizione di estremo inferiore e superiore esistono due punti $y_1 = f(a)$ e $y_2 = f(b)$ di $f(J)$ tali che $y_1 < \bar{y} < y_2$.

Applicando il teorema degli zeri alla funzione $g : x \mapsto f(x) - \bar{y}$ nell'intervallo $[a, b]$ se $a < b$, o $[b, a]$ se $b < a$, otteniamo l'asserto. $\square$

Osservazione. Il precedente Teorema dei valori intermedi si dimostra usando il Teorema degli zeri che a sua volta è un suo corollario. Infatti dal Teorema 4.1.3 segue che se f assume valori sia positivi sia negativi, esiste almeno un punto del dominio in cui si annulla. Si può quindi affermare che i due teoremi sono equivalenti.

Corollario 4.1.1. *Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo $J \subseteq \mathbb{R}$. Allora sono possibili i seguenti casi, in dipendenza dell'esistenza di massimo e minimo*

$$\begin{aligned}
\textit{esistono } m = \min f \textit{ e } M = \max f \quad &\Leftrightarrow \quad f(J) = [m, M] \\
\textit{esiste } m = \min f \textit{ e non esiste } \max f \quad &\Leftrightarrow \quad f(J) = [m, \sup f) \\
\textit{non esiste } \min f \textit{ ed esiste } M = \max f \quad &\Leftrightarrow \quad f(J) = (\inf f, M] \\
\textit{non esistono nè } \min f \textit{ nè } \max f \quad &\Leftrightarrow \quad f(J) = (\inf f, \sup f)
\end{aligned}$$

Esempio. La funzione $f(x) = 1/x$, sebbene sia continua, non ha per immagine un intervallo (perché?).

Teorema 4.1.4 (di continuità per le funzioni monotone, senza dimostrazione)**.** *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona. Se l'immagine di* f *è un intervallo, allora* f *è continua (non occorre che sia definita in un intervallo).*

Osservazione. Mediante il precedente teorema si può dimostrare che le funzioni esponenziali logaritmiche e potenze ad esponente reale sono continue.

Teorema 4.1.5 (di Weierstrass, senza dimostrazione)**.** *Se una funzione è continua in un intervallo limitato e chiuso, allora ammette minimo e massimo.*

ATTENZIONE: per noi il massimo (minimo) è il più grande (piccolo) dei valori assunti. In alcuni testi si usa anche la notazione massimo (minimo) assoluto o globale, per contrapporlo al massimo (minimo) locale che sarà definito in seguito.

Corollario 4.1.2. *L'immagine continua di un intervallo limitato e chiuso è un intervallo limitato e chiuso.*

Esercizio da fare. Provare che se una funzione è continua sull'unione di due (tre, quattro, un numero finito) di intervalli limitati e chiusi, allora ammette massimo e minimo.

Osservazione. Le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono tre: continuità della funzione; il dominio è un intervallo limitato; il dominio è un intervallo chiuso. Mostriamo con degli esempi che nessuna delle tre ipotesi può essere rimossa (ferme restando le altre due) senza pregiudicare l'esistenza del minimo o del massimo.

1. La funzione $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$ non ammette massimo nè minimo (provarlo per esercizio determinandone l'immagine sia disegnando il grafico che usando la definizione). Quale ipotesi del Teorema di Weierstrass non è soddisfatta?

2. La funzione $f\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ non ammette massimo (provarlo per esercizio). Quale ipotesi del Teorema di Weierstrass non è soddisfatta?

3. La funzione $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ non ammette massimo (provarlo per esercizio). Quale ipotesi del Teorema di Weierstrass non è soddisfatta?

Inoltre le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono sufficienti ma non necessarie per l'esistenza di massimo e minimo. Per dimostrare questa affermazione, trovare un esempio di funzione che, pur non soddisfacendo una (o due, o anche tre) delle ipotesi del Teorema di Weierstrass, ammetta massimo e minimo.

Riguardare le proprietà dei polinomi. Più precisamente il concetto di radice e sua molteplicità, la divisione con resto fra polinomi e il Teorema di Ruffini cioè: *il resto della divisione di un polinomio* $P(x)$ *di grado* ≥ 1 *per* $x - x_0$ *è il valore* $P(x_0)$. Si ricordi che la regola di Ruffini è un algoritmo per calcolare quoziente e resto della divisione $P(x)\colon (x - x_0)$.

4.1.2 Venerdì 23/10/09

27-28. Lezioni tenute dal Dott. Bianchini: esercizi.

Esercizi 4.1.1.
1. *Dedurre dal teorema dei valori intermedi che la funzione segno non è continua.*
2. *Provare, usando il teorema dei valori intermedi, che l'immagine del polinomio* $P : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ *è tutto* $\mathbb{R}$.

3. *Provare, usando il teorema dei valori intermedi, che l'immagine del polinomio* $Q : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2$ *è una semiretta positiva.*

4. *Convincersi (ed eventualmente cercare di provare) che l'immagine di un polinomio di grado pari è una semiretta mentre quella di un polinomio di grado dispari è* $\mathbb{R}$.

5. *Determinare dominio, continuità, segno e funzione derivata delle funzioni definite da*

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,,\ \sqrt{x-1}\,,\ \frac{3}{x^2}+1\,,\ \sqrt{x^2+2x-1}\,,\ |x^2-4x-5|\,,\ \sqrt{-x}.$$

Inoltre di ciascuna funzione si calcoli, mediante la definizione, l'immagine e si determini l'esistenza di massimo (minimo), punti di massimo (minimo) e funzione inversa. Di quali delle precedenti funzioni si può dire a priori che l'immagine è un intervallo?

6. *Usando il teorema degli zeri determinare il segno della funzione definita da*

$$f(x) = \frac{x^3-2x-3}{x+5}$$

7. *Usando la continuità, disegnare un grafico qualitativo della funzione* $x \mapsto \sin(1/x)$. Suggerimento. *Si calcoli l'immagine, i punti di massimo e minimo, gli zeri e si osservi che la funzione è dispari, che è positiva per* $x > 1/\pi$ *(perchè?) e che è decrescente su* $[2/\pi, +\infty)$.

8. *Usando la continuità, disegnare un grafico qualitativo della funzione* $x \mapsto \sin(x)/x$, *estesa per continuità a* 0. Suggerimento. *Si calcolino gli zeri e il segno, si osservi che la funzione è pari e che il suo grafico è delimitato dai grafici* $y = \pm 1/x$.

9. *Disegnare il grafico e determinare la continuità al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *delle funzioni*

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1)+k & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x)+k & \text{se } x > 0 \\ x^2+k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Se ne determini inoltre, graficamente, immagine estremo superiore ed inferiore e, se esistono, massimo e minimo.

10. *Disegnare i grafici delle seguenti funzioni e determinare graficamente immagine e estremo superiore e inferiore*

$$x \mapsto \ln(|x|)\,, \quad x \mapsto |\ln(|x|)|\,, \quad x \mapsto |\arctan(x)|\,, \quad x \mapsto \tan(|x|)$$

Delle precedenti funzioni determinare la funzione derivata specificando il dominio.

11. *Considerare la funzione definita da* $f(x) := x + e^x$ *e verificare, usando la teoria svolta, che è continua. Giustificare inoltre le seguenti affermazioni*

    (a) *La funzione è strettamente crescente.*

    (b) *L'equazione* $x + e^x = 3$ *ammette una soluzione unica.*

    (c) *L'immagine della funzione è tutto* $\mathbb{R}$.

    (d) *La funzione ha inversa continua con dominio e immagine uguali a* $\mathbb{R}$

12. *Calcolare gli zeri e il segno delle funzioni:* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$, $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. *(Notare che* $x^3 - 2x^2 + x + 4 = x(x-1)^2 + 4$ *e* $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$*).*

13. *Delle seguenti funzioni studiare: dominio, massimo e minimo, zeri e segno*
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}, \quad f(x) = \log\Big(\frac{x-3}{x+1}\Big), \quad f(x) = \arcsin\Big(\sqrt{x^2-4x-5}-2\Big).$$
14. *Trovare il dominio di:* $f(x) = \log(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$.
15. *Calcolare zero e segni della funzione*
$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 6}{x^2 + 1.}$$
16. *Calcolare zeri, min e max della funzione*
$$f(x) = |x^3 - 3x^2 - 2x - 6|.$$
17. *Calcolare per quali valori di k è continua la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-k) & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}.$$
Determinare inoltre se esistono valori di k per cui la funzione \`*derivabile.*
18. **Esercizio da fare**. *Provare il seguente Corollario del Teorema 3.2.3 sulla derivata della funzione inversa.* Sia $f \in C^1(J)$ una funzione invertibile con derivata non nulla nell'intervallo J (quindi ha segno costante, perchè?). Allora $f^{-1} \in C^1(f(J))$ e si ha per ogni punto $x \in f(J)$,
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$
Suggerimento. *Si tratta di saper leggere la formula del teorema.*
19. *Dimostrazione (facoltativa) del Teorema 3.2.3 sulla derivata della funzione inversa. Essendo f derivabile in x_0, esiste $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ continua in x_0 e tale che $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ per ogni $x \in J$, inoltre φ è non nulla in J per l'invertibilità di f. Poiché (per definizione di funzione inversa) risulta $f^{-1}(y) \in J$ per ogni $y \in f(J)$, ponendo nella suddetta uguaglianza $f^{-1}(y)$ al posto di x (e tenendo conto che $x_0 = f^{-1}(y_0)$), si ottiene*
$$f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0)) = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0));$$
che possiamo scrivere nella forma
$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)).$$
Di conseguenza, se $y \neq y_0$, si ha necessariamente $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$, ed avendo inoltre supposto $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$, si ottiene l'uguaglianza
$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - y_0), \quad \forall\, y \in f(J).$$
Per la continuità della funzione inversa, $f^{-1}\colon f(J) \to \mathbb{R}$ è continua, quindi è continua in y_0 anche la funzione $1/(\varphi \circ f^{-1})$. Questo prova che f^{-1} è derivabile in y_0. Inoltre si ha
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)},$$
e la tesi è dimostrata. $\square$

Capitolo 5

Calcolo differenziale delle funzioni reali di una variabile reale

In questo capitolo si trattano le proprietà principali delle funzioni derivabili. Tutte le funzioni (se non esplicitamente detto) saranno definite su intervalli e J rappresenterà un intervallo. Lo studente è tenuto ad estendere la teoria alle funzioni definite da unioni di intervalli.

5.1 Settimana 26-31/10/09. Par. 8.1, 8.6 - 8.8

5.1.1 Mercoledí 28/10/09

29-31. Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in x_0, ponendo $x = x_0 + h$ nella definizione di funzione derivabile in x_0, otteniamo

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(x_0 + h)h = (f'(x_0) + \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0))h,$$

dove la funzione $h \mapsto (\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0))$ è una funzione continua e nulla nel punto $h = 0$. Chiameremo funzioni con tali proprietà funzioni infinitesime in 0, più precisamente:

Definizione 5.1.1. *Chiameremo* funzione infinitesima in 0*, una qualunque funzione che sia continua e nulla in $x = 0$. Indicheremo tale funzione col simbolo $\epsilon(x)$. Ovviamente, la variabile di detta funzione potrà essere indicata con una qualunque lettera, ad esempio $\epsilon(x - x_0)$ indicherà una qualunque funzione continua e nulla nel punto $x = x_0$, la diremo* infinitesima in x_0 *e scriveremo:*

$$f(x) = \epsilon(x - x_0).$$

Osservazione 1. Come abbiamo visto, mediante la definizione di limite, il concetto di funzione infinitesima in x_0 può essere espresso dicendo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,, \tag{5.1}$$

inoltre, se la proprietà (5.1) è vera, f (anche se non è definita in x_0) può essere estesa per continuità ad x_0 col valore $f(x_0) = 0$. Una funzione con la proprietà (5.1) è detta infinitesima (o anche un infinitesimo) per $x \to x_0$ e si usa il simbolo detto di Landau (vedi pag.83 del Par.4.2 del testo o la successiva Definizione 7.3.1)

$$f(x) = o(1) \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

Per quanto detto possiamo quindi affermare che

$$f(x) = \epsilon(x - x_0) \Leftrightarrow f(x) = o(1) \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$

Osservazione 2. Si noti che $\epsilon(x)$ (cosí come $o(1)$) non è una funzione, ma una proprietà. Infatti diremo che la funzione seno e la funzione identità sono infinitesime in 0 e scriveremo $\sin(x) = \epsilon(x)$ e $x = \epsilon(x)$, ma **non possiamo certo dedurre** $x = \sin(x)$.

Lemma 5.1.1. *Per il calcolo con funzioni infinitesime valgono le seguenti regole (dimostrarle per esercizio):*

1. *f è continua in un punto $x = x_0$ se e solo se $f(x_0 + h) = f(x_0) + \epsilon(h)$ o, equivalentemente, $f(x) = f(x_0) + \epsilon(x - x_0)$;*

2. *la somma (o la differenza) di due funzioni $\epsilon(x)$ è una funzione $\epsilon(x)$ (in formule $\epsilon(x) \pm \epsilon(x) = \epsilon(x)$);*

3. *il prodotto di una funzione f continua (nel punto $x = 0$) per una funzione $\epsilon(x)$ è una funzione $\epsilon(x)$ (in formule $\epsilon(x)f(x) = \epsilon(x)$);*

4. *se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni $\epsilon(x)$, allora la composizione $g \circ f(x)$ è una funzione $\epsilon(x)$ (in formule $\epsilon \circ \epsilon(x) = \epsilon(x)$).*

Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ derivabile in un punto $x_0 \in J$. Per la definizione di funzione derivabile, sappiamo che esiste $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ continua in x_0 e tale che

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)\,, \quad \forall\, x \in J.$$

Denotando con h l'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente (equivalentemente usando il cambiamento di variabile $x = x_o + h$) si ha l'uguaglianza

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi(x_0 + h)h\,,$$

valida per ogni numero h ammissibile, cioè tale che $x_0 + h \in J$.

Notiamo che $\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \epsilon(h)$, dove la funzione $\epsilon(h) := \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ è continua e nulla per $h = 0$. Quindi, tenendo conto che $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ si ottiene l'uguaglianza

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \epsilon(h)h\,,$$

valida per ogni h ammissibile. Se ritorniamo alla variabile di partenza, possiamo anche scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)(x - x_0).$$

Tale uguaglianza si chiama *formula di Taylor del primo ordine di f in x_0* (col resto nella forma di Peano). Ritorneremo in seguito sulla formula di Taylor, adesso vogliamo considerare il significato di tale formula in termini di approssimazione.

Consideriamo quindi la funzione *approssimante*

$$P_1 : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{col solito cambio di variabile} \quad h \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Tale funzione, che è un polinomio di primo grado, si dice *approssimazione del primo ordine di f in x_0*. Il nome deriva dal fatto che P_1 è il polinomio di primo grado che meglio approssima la funzione "vicino" ad x_0, cioè scegliendo P_1 invece di f, *il rapporto fra l'errore che si commette e l'incremento della variabile può essere reso arbitrariamente piccolo purchè l'incremento della variabile sia scelto sufficientemente piccolo.* Inoltre P_1 è l'unico polinomio di primo grado con questa proprietà. Più precisamente, denotato l'errore con

$$E_1 : x \mapsto f(x) - P_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)],$$

la formula di Taylor ci dice che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ tale che:

$$|E(x)| < |x - x_0|\varepsilon \quad \text{per ogni} \quad x \in I(x_0, \delta) \cap J.$$

Definizione 5.1.2. *Il grafico della approssimazione del primo ordine (che è una retta del piano) si dice* retta tangente al grafico di f nel punto corrispondente a x_0. *Quindi è la retta di equazione*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Definizione 5.1.3. *Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Un punto $x_0 \in J$ si dice* di minimo relativo *(o locale) per f in J se esiste un intorno $U = I(x_0, \delta)$ di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in U \cap J$. In modo analogo si definisce il concetto di* massimo relativo. *Un punto di minimo o di massimo relativo per f (in J) si dice* estremante *per f (in J).*

Si osservi che un punto di minimo per una funzione è anche di minimo relativo ma, in generale, non è vero il contrario. Tuttavia, un punto di minimo relativo è di minimo per la restrizione della funzione ad un opportuno intorno del punto.

Esempi. i. Il punto $x_0 = 0$ è di minimo (e quindi anche relativo) per la funzione $f(x) = 1 + |x|$, visto che $f(0) = 1$ e $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ii. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo per la funzione $f(x) = 1 + |x| - x^2$.

Dimostrazione. $f(x) = 1 + |x|(1 - |x|)$, quindi se $|x| < 1$, allora $1 - |x| \geq 0$ e $f(x) \geq 1$. Pertanto, "se la restringo ad un opportuno intorno di $x = 0$" (in questo caso posso restringerla ad esempio a $I(0, 1)$) la funzione ha un minimo per $x = 0$. Ovviamente $x = 0$ non è di minimo per f, perché $f(x)$ in alcuni punti (quali?) assume valori minori di $f(0)$.

Attenzione. I punti di massimo o di minimo relativo di una funzione (cioè i punti estremanti) stanno nel dominio, e non sul grafico. I minimi e i massimi relativi (o assoluti), cioè i valori assunti nei punti estremanti, detti *estremi della funzione*, appartengono all'immagine (e neppure quelli stanno sul grafico).

Teorema di Fermat. *Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in J$. Supponiamo che:*

(1) *x_0 sia interno ad J;*

(2) *f sia derivabile in x_0;*

(3) *x_0 sia un punto estremante per f in J.*

Allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $f'(x_0) \neq 0$. Ad esempio supponiamo $f'(x_0) > 0$. Per l'ipotesi (2) la funzione definita da $r(x) = \begin{cases} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)\,, & x \neq x_0 \\ f'(x_0)\,, & x = x_0 \end{cases}$ è continua in x_0, quindi (per il teorema della permanenza del segno) esiste un intorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ di x_0 (che per l'ipotesi (1) possiamo supporre contenuto in J) in cui $r(x) > 0$. Quindi, in tale intorno, $f(x) < f(x_0)$ per $x < x_0$ e $f(x) > f(x_0)$ per $x > x_0$. Ne segue che x_0 non può essere né un punto di minimo né un punto di massimo, contraddicendo l'ipotesi (3). Pertanto non può essere $f'(x_0) > 0$. In maniera analoga si prova che non può essere $f'(x_0) < 0$. Dunque $f'(x_0) = 0$. $\square$

Lemma 5.1.2. *Il Teorema di Fermat si può enunciare anche nel modo seguente (versione garantista).*

Se in un punto interno al dominio di una funzione la derivata è diversa da zero, allora tale punto non è estremante.

Osserviamo che, in base al Teorema di Fermat, i punti "candidati ad essere" estremanti per $f\colon J \to \mathbb{R}$ vanno cercati tra le seguenti tre categorie (sono quelli che rimangono dopo aver scartato i punti interni a J con derivata non nulla):

- punti di J non interni (cioè gli estremi di J, se gli appartengono);

- punti di J in cui la funzione non è derivabile;
- punti interni a J in cui si annulla la derivata.

Nessuna delle suddette tre condizioni ci assicura che un punto sia estremante. Tuttavia, se lo è, almeno una delle tre deve necessariamente essere soddisfatta.

Esempio molto importante. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Il teorema di Weierstrass ci assicura che ha massimo e minimo. Per calcolarli, posso usare il teorema di Fermat per determinare i candidati estremanti, cioè i punti di massimo e minimo sono da ricercare fra i punti del seguente insieme

$$X = \{a, b\} \cup \{x \in (a, b) : \nexists\, f'(x)\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$$

Se X contiene un numero finito di punti, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, il massimo e il minimo di f saranno, rispettivamente, il più grande e il più piccolo fra i valori di:

$$f(X) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

Definizione 5.1.4. *Il punto x_0 si dice* singolare *per $f : J \to \mathbb{R}$ se f è continua ma non derivabile in x_0.*

Esercizi 5.1.1.

1. *Stabilire quali delle funzioni definite da:*

   $$f(x) = x - \cos(x),\ 1 - \cos(x),\ \ x/(1 + x),\ |x|e^x,\ e^x,\ \cos(x) - e^x,\ x^2 - \ln(\cos(x)).$$

   sono del tipo $\epsilon(x)$.

2. *Stabilire quali delle funzioni definite da:*

   $$x^2,\ x - \cos(x),\ x^3 \cos(x),\ x \sin(x) + x^2,\ x/(1 + x),\ |x|e^x,\ x^2 e^x,\ |x|xe^x.$$

   possono essere scritte nella forma $\epsilon(x)x$.

3. *Data la funzione definita da $f(x) = 2x - x^3$, determinare la retta tangente al grafico di f nei punti corrispondenti a $x_0 = 0, -1, 1$.*

4. *Studiare le seguenti funzioni in base alla teoria fin qui svolta*

   $$x \mapsto \sin(1/x), \quad x \sin(1/x), \quad x^2 \sin(1/x),$$

5. *Determinare dominio e funzione derivata delle funzioni $x \mapsto x^x, \quad (1 - x^2)^{\sin(x)}$,*

6. *La funzione abs ha due punti di massimo e uno di minimo nell'intervallo $[-1, 1]$. Quali sono i suoi punti di massimo e minimo sull'intervallo $[-1, 3]$?*

7. *Determinare massimo e minimo della funzione $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ su J con $J = [-4, 4],\ [0, 7],\ [-4, -2],\ [2, 5]$. È particolarmente istruttivo risolvere il problema sia con il teorema di Fermat che disegnando il grafico.*

8. *Disegnare il grafico e determinare graficamente massimo e minimo della funzione $x \mapsto ||x^3 + 1| - 3|$ su J con $J = [-2, 2],\ [0, 7],\ [-1/2, 2]$. Riconoscere a quali delle categorie sopra indicate appartengono i punti di massimo e minimo. Risolvere il problema usando il teorema di Fermat (prescindendo dal grafico disegnato), usando il teorema di derivazione per le funzioni composte e stabilendo quali siano i punti singolari mediante la definizione di derivata.*

9. *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ massimo e minimo (se esistono) della funzione $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x\,, & x \leq 0 \\ 1/(x + 3) + k\,, & x > 0 \end{cases}$. Ci sono ulteriori massimi e minimi relativi?*

5.1.2 Venerdí 30/10/08.

32-33.

Teorema 5.1.1 (Teorema di Rolle)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente le seguenti ipotesi:*

(1) *f è continua in $[a,b]$;*

(2) *f è derivabile in (a,b);*

(3) *$f(a) = f(b)$.*

Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Poiché f è continua in un intervallo limitato e chiuso, per il Teorema di Weierstrass ammette minimo e massimo. Esistono cioè (almeno) due punti c_1 e c_2 in $[a,b]$ per i quali risulta $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ per ogni $x \in [a,b]$. Se uno dei due punti, ad esempio $c = c_1$, è interno all'intervallo $[a,b]$, allora, essendo f derivabile in tal punto, dal Teorema di Fermat segue $f'(c) = 0$ (e la tesi, in questo caso, è dimostrata). Se, invece, nessuno dei due punti è interno ad $[a,b]$, allora sono entrambi negli estremi di $[a,b]$, e quindi, per l'ipotesi (3) si ha $f(c_1) = f(c_2)$. Pertanto, essendo $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, la funzione risulta costante e, di conseguenza, la derivata è nulla in ogni punto $c \in (a,b)$. □

I seguenti esempi mostrano che nessuna delle tre ipotesi del Teorema di Rolle può essere rimossa, ferme restando le altre due.

Esempio. La funzione $f(x) = |x|$ è continua in $[-1,1]$ e $f(-1) = f(1)$, ma la sua derivata non si annulla mai in $(-1,1)$. Perché non si può applicare il Teorema di Rolle?

Esempio. La funzione $f(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$ è definita in $[0,1]$, è derivabile in $(0,1)$ e $f(0) = f(1)$. Tuttavia la sua derivata non si annulla mai in $(0,1)$. Perché non si può applicare il Teorema di Rolle?

Esempio. La funzione $f(x) = x$ è derivabile in $[0,1]$ (quindi anche continua), ma la sua derivata non si annulli mai in $(0,1)$. Perché non si può applicare il Teorema di Rolle?

Il seguente risultato è un'importante estensione del Teorema di Rolle, nonché una sua facile conseguenza.

Teorema 5.1.2 (Teorema di Lagrange o del valor medio)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente le seguenti ipotesi:*

(1) *f è continua in $[a,b]$;*

(2) *f è derivabile in (a,b).*

Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. Definiamo una nuova funzione

$$\varphi(x) := f(x) - kx\,,$$

determinando la costante k in modo che φ soddisfi (in $[a,b]$) le ipotesi del Teorema di Rolle. Le prime due sono ovviamente verificate qualunque sia la costante k. È facile mostrare che l'unica costante che rende $\varphi(a) = \varphi(b)$ è

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Per il Teorema di Rolle esiste $c \in (a, b)$ tale che $\varphi'(c) = 0$, e la tesi segue immediatamente osservando che $\varphi'(x) = f'(x) - k$. $\square$

Esercizi da fare.

1. Dati due arbitrari punti $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervallo che ha per estremi tali punti si chiama *segmento di estremi* a *e* b e si denota con $\overline{ab}$. In altre parole: $\overline{ab} = [a, b]$ se $a < b$, $\overline{ab} = \{a\}$ se $a = b$ e $\overline{ab} = [b, a]$ se $a > b$.
   Dedurre dal Teorema di Lagrange che se f è derivabile in un intervallo J, allora, dati $x_1, x_2 \in J$, esiste un punto $c \in \overline{x_1 x_2}$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

2. Dare l'interpretazione geometrica dei teoremi di Rolle e Lagrange, cioè esprimerli in termini di retta tangente al grafico.

Diamo ora alcune importanti conseguenze del Teorema di Lagrange. In particolare faremo vedere che il segno della funzione derivata comporta importanti proprietà di crescenza per la funzione.

Corollario 5.1.1. *Sia $f \colon J \to \mathbb{R}$ derivabile in un intervallo J*

1. *Se $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) per ogni $x \in J$, allora f è crescente (risp. decrescente) in J.*

2. *Se $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) per ogni $x \in J$, allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) in J.*

3. *Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in J$, allora f è costante in J.*

Dimostrazione. Dimostriamo il punto *1*: siano $x_1, x_2 \in J$ tali che $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ per cui $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Poiché $f'(c) \geq 0$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$. Gli altri punti si dimostrano in maniera analoga, dimostrarli per esercizio. $\square$

Osservazione. Nel precedente corollario, l'ipotesi che f sia definita in un intervallo non può essere rimossa. Ad esempio, per quanto riguarda il punto *3*, si osservi che la funzione $f(x) = |x|/x$ è derivabile nel suo dominio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ha derivata nulla, ma non è costante (lo è in ogni sottointervallo del dominio).

Esempi. (a) Applicare le condizioni di crescenza per determinare i punti estremanti e l'immagine della funzione $f : [-2, 1] \mapsto |x^3 + 1|$.
(b) Rispondere alla seguente domanda: *per quali valori del parametro λ l'equazione $|x^3 + 1| + 2\lambda = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[-2, 1]$?* Lo studente risolva anche graficamente i precedenti problemi e confronti i risultati ottenuti graficamente con quelli ottenuti per via analitica.

Svolgimento. (a) Innanzitutto osserviamo che f è continua in un intervallo compatto (cioè limitato e chiuso). Pertanto, per il Teorema di Weierstrass, ammette minimo e massimo assoluti. Inoltre, essendo definita in un intervallo, per il teorema dei valori intermedi, la sua immagine è un intervallo (necessariamente limitato e chiuso, dato che f ammette minimo e massimo). Per trovare i punti estremanti (relativi e assoluti) conviene suddividere il dominio di f in intervalli in cui risulta monotona. Studiamo perciò il segno della sua derivata. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 1 & \text{se} \quad -2 \leq x \leq -1 \\ \\ x^3 + 1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$

risulta

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ \\ 3x^2 & \text{se} \quad -1 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $[-2,-1]$ ed è crescente in $[-1,1]$. Da cui si deduce che $x=-2$ e $x=1$ sono punti di massimo e $x=-1$ è un punto di minimo. Calcolando i valori di $f(x)$ in detti punti si può affermare che il valore massimo di f è 7 ed è assunto in $x=-2$, mentre il minimo vale 0 ed è assunto nel punto $x=-1$. In base al teorema dei valori intermedi si può concludere che l'immagine di f è l'intervallo $[0,7]$.

(b) Si osservi che l'equazione $|x^3+1|+2\lambda=0$ ammette almeno una soluzione in $[-2,1]$ se e solo se il numero -2λ appartiene all'insieme dei valori assunti dalla funzione $|x^3+1|$ nell'intervallo $[-2,1]$, cioè se e solo se -2λ sta nell'immagine della funzione $f(x)$ definita nel precedente esercizio. Pertanto la suddetta equazione ammette una soluzione in $[-2,1]$ se e solo se $0\leq -2\lambda\leq 7$, da cui si ricava (moltiplicando i tre membri della doppia disequazione per $-1/2$) che $0\geq\lambda\geq -7/2$ (ovvero $\lambda\in[-7/2,0]$).

Definizione 5.1.5. *La derivata della derivata di una funzione f si chiama* derivata seconda *di f e si indica con f'', con D^2f o con*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx^2}\,.$$

In generale, la derivata della derivata $(n-1)$-esima di f si chiama derivata n-esima *e si denota con $f^{(n)}$, con D^nf o con*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx}\right)=\frac{d^nf}{dx^n}\,.$$

Abbiamo definito nel Capitolo 3 il significato di $f\in C^0(A)$ e $f\in C^1(A)$, estendiamo ora la notazione.

Definizione 5.1.6. *Una funzione f si dice (di classe) C^n in $A\subset\mathbb{R}$ (o che appartiene alla classe $C^n(A)$), $n\in\mathbb{N}$, se ammette derivata n-sima continua in A. Si dice infine che f è (di classe) C^∞ in A, se è C^n in A, per ogni $n\in\mathbb{N}$. Per indicare che f è di classe C^n (risp. C^∞) in A si scrive:*

$$f\in C^n(A)\ \textit{(risp. } f\in C^\infty(A)\textit{)}.$$

Abbiamo visto che le funzioni derivabili sono anche continue, pertanto, se f è C^1, essendo derivabile, è anche di classe C^0. Più in generale vale il seguente risultato:

$$C^\infty(A)\subset\cdots\subset C^n(A)\subset C^{n-1}(A)\subset\cdots\subset C^0(A)$$

Esercizi 5.1.2. 1. *(Facoltativo). Sia f derivabile in un intervallo J. Provare che la condizione "$f'(x)\geq 0$, $\forall\, x\in J$" non è soltanto sufficiente, ma anche necessaria affinché f sia crescente in J.*

Suggerimento. *Osservare che se f è crescente allora, fissato $x_0\in J$, risulta*

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\,,\quad \forall\, x\in J,\ x\neq x_0,$$

e quindi non può essere $f'(x_0)<0$, altrimenti, per il teorema della permanenza del segno per le funzioni continue…

2. *Sia f derivabile in un intervallo J. Mostrare, con un esempio, che la condizione "$f'(x)>0$ per ogni $x\in J$" non è necessaria affinché f sia strettamente crescente in J (è soltanto sufficiente).*

3. *Usare il punto 3 del Corollario 5.1.1 per mostrare che la funzione $x\mapsto \arcsin(x)+\arccos(x)$ è costante e determinare tale costante.*

4. *Determinare i punti estremanti delle seguenti funzioni e stabilire quali di essi sono di massimo o minimo (assoluto o relativo): $x\mapsto xe^{-x}$, $|x|e^{-x}$, $|x|-x^2$.*

5. *Studiare (per quanto possibile) i grafici delle funzioni*

$$x \quad \mapsto \quad x^x\,, \quad e^{-x^2} \quad 1+|x|-x^2$$

6. *Provare il seguente risultato.* Sia $f \in C^1([a,b])$. Se $f'(a) > 0$ (risp. $f'(a) < 0$), allora a è un punto di minimo (risp. massimo) relativo. Analogamente, se $f'(b) > 0$ (risp. $f'(b) < 0$), allora b è un punto di massimo (risp. minimo) relativo.

   Svolgimento. *Da un punto di vista intuitivo, basta disegnare il grafico della retta tangente nei punti di ascissa a e b, ricordandosi che la retta tangente è il grafico di una funzione approssimante (lo studente volenteroso usi questa idea per dimostrare il risultato osservando che basta la derivabilità di f nei soli estremi dell'intervallo). Altrimenti basta applicare il teorema della permanenza del segno alla funzione f' e i corollari precedenti sulla crescenza delle funzioni derivabili.* □
   Osserviamo che il risultato del precedente esercizio rappresenta (soltanto) una condizione sufficiente affinché un punto sia estremante, mentre il teorema di Fermat dà (soltanto) una condizione necessaria.

7. *La funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^2$, mostra che la condizione "$f'(a) > 0$" del precedente risultato non è necessaria affinché il punto a sia di minimo. Si invitano gli studenti a dedurre (dal suddetto risultato) che una condizione necessaria (nell'ipotesi che f sia derivabile nell'estremo a del dominio $[a,b]$) è la seguente: "$f'(a) \geq 0$".*

8. *Delle seguenti funzioni stabilire per quali $n \in \mathbb{N}$ sono di classe C^n e su quali insiemi.*

   (a) *Polinomi, funzioni razionali, radici, potenze ad esponente reale ed eventuali loro estensioni per continuità a* 0.

   (b) $abs, \sin, \arcsin, \exp, \ln, \ldots$

   (c) *Tutte le funzioni considerate nei precedenti capitoli*

   (d) $x \mapsto |x|x^3,\ x^2\sin(1/x)$

5.2 Settimana 2-7/11/09. Par. 8.2, 8.9, 8.10

5.2.1 Mercoledí 4/11/09.

34-36

Definizione 5.2.1. *Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e assegnato un numero $\delta > 0$, l'*intorno sinistro *(risp. l'*intorno destro*) di x_0 di ampiezza (o raggio) δ è l'intervallo $(x_0-\delta, x_0]$ (risp. $[x_0, x_0+\delta)$) costituito dai punti $x \leq x_0$ (risp. $x \geq x_0$) che distano da x_0 meno di δ.*

Definizione 5.2.2. *Data una funzione $f\colon J \to \mathbb{R}$ e dato un punto $x_0 \in J$ che non sia l'estremo inferiore (sinistro) per J, la* derivata (laterale) sinistra *di f in x_0 è (quando esiste) la derivata in x_0 della restrizione di f all'insieme $(-\infty, x_0] \cap J$. Tale derivata si denota con $D_-f(x_0)$ o con $f'_-(x_0)$. In modo analogo (purché x_0, oltre che appartenere ad J non sia l'estremo destro di J) si definisce la derivata (laterale) destra di f in x_0, denotata $D_+f(x_0)$ o $f'_+(x_0)$.*

Lemma 5.2.1. *$f\colon J \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 interno ad J se e solo se esistono $D_-f(x_0)$ e $D_+f(x_0)$ e coincidono.*

Dimostrazione. Per esercizio.

Osservazione Si osservi che se due funzioni f e g coincidono in un intorno sinistro (risp. destro) di x_0 (x_0 incluso), allora hanno la stessa derivata sinistra (risp. destra) in x_0

(ammesso che esista). Quindi, se g è addirittura derivabile in x_0, allora esiste la derivata sinistra di f in x_0 e risulta $D_- f(x_0) = g'(x_0)$. Ad esempio, per $f(x) = |x| - x|x|$ si ha $D_- f(0) = -1$, perché per $x \leq 0$ la funzione $f(x)$ coincide con la funzione derivabile $g(x) = x^2 - x$ la cui derivata nel punto $x_0 = 0$ è -1.

Definizione 5.2.3. *Un punto si dice* angoloso *per una funzione se in tal punto la funzione è derivabile sia a sinistra sia a destra ma le derivate laterali sono diverse. In particolare, una funzione in un punto angoloso non è derivabile (ma non è difficile provare che è necessariamente continua).*

Intuitivamente, da un punto di vista grafico, è chiaro cosa significa *punto a tangente verticale.* La seguente defizione sarà ripresa dopo la definizione di limite.

Definizione 5.2.4. *Un punto x_0 si dice* a tangente verticale *per $f : J \to \mathbb{R}$, se f è continua in x_0 e la funzione reciproca della funzione rapporto incrementale in x_0 cioè*

$$\frac{1}{r_{x_0}} : x \mapsto \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

è estendibile per continuità ad x_0 col valore 0. Più precisamente:
se esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ in cui r_{x_0} non cambia segno allora x_0 si dice flesso a tangente verticale*;*
se invece r_{x_0} ha segni diversi in intorni destri e sinistri di x_0, allora si dice cuspide.

Esempio. Per la funzione $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale. Per la funzione $x \mapsto \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$ è una cuspide.

Osservazione. Sul libro solo i flessi a tangente verticale sono chiamati punti a tangente verticale, mentre le cuspidi non sono chiamate a tangente verticale. Vedremo come questo può essere espresso in termini di limiti.

Definizione 5.2.5. *Una funzione reale definita in un intervallo J si dice* convessa *[*concava*] se la corda (cioè il segmento) che congiunge due punti qualunque del suo grafico sta sopra [sotto] il grafico.*

Teorema 5.2.1 (senza dimostrazione)**.**

1. *Sia $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa [concava] se e solo se la sua derivata è crescente [decrescente] in J.*
2. *Sia $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa [concava] se e solo se la retta tangente ad un punto qualunque del suo grafico sta sotto [sopra] il grafico.*
3. *Sia $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in J. Allora f è convessa [concava] se e solo se $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$] per ogni x in J.*

Corollario 5.2.1 (condizione sufficiente per l'esistenza di un punto di estremo globale)**.** *Sia f una funzione derivabile e convessa [concava] sull'intervallo J. Se esiste $x_0 \in J$ tale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di minimo [massimo] globale per f su J.*

Dimostrazione. Per esercizio: applicare il Teorema 5.2.1 punto *2.* □

Definizione 5.2.6. *Un punto x_0 interno al dominio di una funzione f si dice di* flesso *(per f) se il grafico di f ammette la retta tangente nel punto di ascissa x_0 e se in un suo semi-intorno la funzione è convessa e nell'altro semi-intorno è concava (ossia, se esistono un intorno destro e un intorno sinistro di x_0 con concavità discordi: da una parte la funzione è convessa e dall'altra è concava).*

In base al precedente Teorema 5.2.1, se una funzione è di classe C^2, una condizione che assicura che in un punto x_0 del dominio si abbia un flesso è che la derivata seconda cambi segno in x_0 (da una parte positiva e dall'altra negativa). In tal caso si ha necessariamente $f''(x_0) = 0$ (perché?).

Esempi.

1. La funzione $f(x) = x + x^3$ ha un flesso nel punto $x_0 = 0$, perché in tal punto (appartenente al dominio) $f''(x)$ cambia segno.

2. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha un flesso in $x_0 = 0$ (anche se non è derivabile in $x_0 = 0$), perché ha una tangente verticale in $x = 0$ ed è concava su $(-\infty, 0]$ e convessa su $[0, -\infty,)$.

3. La derivata seconda di $f(x) = x + x^4$ si annulla nel punto $x_0 = 0$, ma f non ha un flesso in tal punto, perché la sua derivata seconda è positiva in un intorno forato di $x_0 = 0$ (cioè privato del punto $x_0 = 0$) e quindi non esiste un semi-intorno del punto in cui la funzione è concava.

4. La funzione $f(x) = 1/x$ non ha un flesso in $x_0 = 0$, perché tal punto non appartiene al dominio di f (anche se f è concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$).

5. La funzione $f(x) = |x| + x^3$ non ha un flesso in $x_0 = 0$, perché sebbene f sia concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$, ha un punto angoloso in $x = 0$.

Esercizi 5.2.1. *1. Definire un punto angoloso in termini di tangenti.*

2. Determinare i punti angolosi della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ e provare che tali punti sono di minimo.

3. Considerare le funzioni, dette rispettivamente: seno iperbolico*,* coseno iperbolico *e* tangente iperbolica*, definite da*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad e \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Provare che $(\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. In altre parole, per ogni $t \in \mathbb{R}$, il punto $(\cosh(t), \sinh(t)) \in \mathbb{R}^2$ appartiene all'iperbole di equazione $y^2 - x^2 = 1$ (per questo le due funzioni sinh *e* cosh *si chiamano iperboliche).*
Provare che le funzioni iperboliche appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$ e calcolarne la derivata. Determinare delle funzioni iperboliche: immagine (mediante la definizione), crescenza, decrescenza ed eventuali funzioni inverse.

4. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 3x^2$. Determinare gli intervalli nei quali f è convessa.

Svolgimento. *La funzione f è derivabile e*

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x\,.$$

Anche f' è derivabile e

$$f''(x) = -x^2 + 5x - 6\,.$$

Sappiamo che, se f è derivabile due volte in un intervallo J, f è convessa (in tale intervallo) se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in J$. Studiamo quindi l'insieme in cui $f''(x) \geq 0$:

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq x \leq 3\,.$$

Ponendo quindi $A = [2, 3]$, risulta che:
- *f è convessa in A;*
- *se f è convessa in un intervallo J, allora $J \subseteq A$.*

Inoltre, dato che f è derivabile in $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, e che in un intorno di ciascuno dei suddetti punti $f''(x)$ cambia segno (cioè in un semi-intorno è positiva e nell'altro è negativa), x_1 e x_2 sono punti di flesso per f.

5. *Studiare, per quanto possibile, la funzione definita da* $f(x) = |x|e^x$.

   Svolgimento. *Si osservi che:*
   $D_f = \mathbb{R}$ *;* f *è continua su tutto* $\mathbb{R}$*;* $f(x) \geq 0 = f(0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$*; pertanto* $x = 0$ *è un punto di minimo per* f.
   La f *è superiormente illimitata perchè prodotto di due funzioni superiormente illimitate, quindi la sua immagine è* $[0, +\infty)$*, poichè è continua su tutto* $\mathbb{R}$.
   La f *è prodotto di due funzioni derivabili in* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$*, e quindi anch'essa è derivabile in* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Non è derivabile in* $x = 0$*, dato che in tal punto la sua derivata destra vale* 1 *(essendo la derivata in* $x = 0$ *di* $f_d(x) = xe^x$*) mentre la derivata sinistra vale* -1 *(dato che è la derivata in* $x = 0$ *di* $f_s(x) = -xe^x$*). Possiamo quindi affermare che* $x = 0$ *è un punto angoloso. Risulta:*

   $$f'(x) = \begin{cases} e^x(x+1) & se \quad x > 0 \\ -e^x(x+1) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

   Da cui segue che $f'(x) = 0 \iff x = -1$*. Inoltre*

   $$f'(x) > 0 \iff (x > 0) \text{ e } (x < -1) \quad , \quad f'(x) < 0 \iff -1 < x < 0\,,$$

   da cui si deduce (studiando gli intervalli di crescenza e di decrescenza della f*) che la funzione ha un massimo relativo (ma non assoluto) in* $x = -1$*, che vale* $f(-1) = 1/e$*, ed un minimo relativo (che avevamo già trovato in quanto minimo assoluto) in* $x = 0$*.*
   Risulta anche che f' *è derivabile in* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *e*

   $$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2) & se \quad x > 0 \\ -e^x(x+2) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

   Da cui segue che $f''(x) = 0 \iff x = -2$*. Inoltre*

   $$f''(x) > 0 \iff (x > 0) \text{ e } (x < -2) \quad , \quad f''(x) < 0 \iff -2 < x < 0\,.$$

   Quindi f *è convessa negli intervalli* $(-\infty, -2]$ *e* $[0, +\infty)$*, ed ha un flesso in* $x = -2$*, cosa che invece non accade in* $x = 0$ *perché è un punto angoloso.*
   Per completare la descrizione del grafico servirebbe conoscere $\ell = \inf f_{|(-\infty,-1)}$*. Dopo aver studiato i limiti potremo affermare che* $\ell = 0$*, per adesso sappiamo che non può essere un valore assunto (perchè* f *è crescente in* $(-\infty, -1)$*) e appartiene all'intervallo* $(0, 1/e)$*.*
   Possiamo ora descrivere *il grafico di* f *partendo da "meno infinito":*
   f cresce da valori "arbitrariamente vicini" a ℓ, ed è convessa fino a $x = -2$, dove ha un flesso e diventa concava continuando a crescere fino ad $x = -1$, dove ha un massimo relativo. Dopodiché f decresce (è sempre concava) fino ad assumere il valore zero in $x = 0$, dove ha un punto angoloso. Successivamente f diventa convessa e crescente in tutto $\mathbb{R}^+$, assumendo valori "arbitrariamente" grandi. *Lo studente disegni un grafico che corrisponde a questa descrizione, assumendo* $\ell = 0$.

6. *Studiare la derivabilità e i massimo e minimi relativi delle funzioni definite da*

   $$x \mapsto |x^3+3x^2-2x-6| \quad e \quad x \mapsto -|x||x+1|/x, \;\; su\ J = [-2, -1/2], [-1, 2], [-1/2, 1/2]$$

7. *Studiare i punti stazionari e la convessità della funzione definita da*

   $$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x^5$$

8. *Determinare gli estremanti della funzione*

   $$f : x \in [-2, 1] \mapsto |x^3 + 1|$$

9. *Determinare per quali valori di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'equazione*
$$|x^3 + 1| + 2\lambda = 0$$
ha almeno una soluzione in $[-2, 1]$.

10. *Studio della concavità, convessità e dei punti di flesso delle funzioni definite da*
$$f(x) = x + x^3\,,\ \ |x| + 2x^4\,,\ \ |x| + x^3$$

11. *Determinare la classe di derivabilità delle funzioni definita da*
$$f(x) = \exp(-|x|)\,,\ \ x\exp(-|x|).$$
Studiarne anche il grafico, per quanto possibile.

12. *Dimostrare che esiste un rettangolo di area massima inscritto nel cerchio di raggio 3 e calcolarne l'area (esercizio n. 14 della dispensa degli esercizi).*

13. *Studiare la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2\pi x & x < -2\pi \\ \sin(x) & -2\pi \leq x \leq 0 \\ mx & x > 0 \end{cases} \quad , m \in \mathbb{R};$$
determinarne la classe di derivabilità e studiarne il grafico.

14. *Studiare il grafico della funzione*
$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x+5}.$$

15. *Studiare la funzione*
$$f(x) = \sqrt{e^x \sin(x)};$$
determinare massimi e minimi relativi. Esistono massimi e minimi assoluti?

5.2.2 Venerdí 6/11/08

37-38 Lezioni tenute dal Dott. Bianchini. Esercizi:
• Studia dove é possibile

(1) Campo di esistenza,

(2) Segno,

(3) Derivata prima e suo segno,

(4) Massimi e minimi sia relativi che assoluti,

(5) Derivata seconda e suo segno,

(6) Flessi

delle seguenti funzioni

(a) $\log(\frac{x^2-x-2}{x-3})$,

(b) $e^{x^2}(x - \frac{3}{2})$,

(c) $\sqrt{1-x^2} - |x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}$,

(d) $e^{\frac{x-3}{1-x}} - 1$.

Prova a tracciarne il grafico.

Capitolo 6

Formula di Taylor per le funzioni reali di una variabile reale

La formula di Taylor è un capitolo del calcolo differenziale importante nelle applicazioni in quanto si occupa dell'approssimazione delle funzioni mediante polinomi.

Quando l'approssimazione è "locale", cioè riguarda punti "arbitrariamente vicini" ad un punto fissato x_0, si chiama *formula di Taylor col resto in forma di Peano* ed è uno strumento fondamentale nel calcolo dei limiti e nel capire "l'andamento" del grafico di una funzione f vicino al punto $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$.

Quando l'approssimazione è su un intero intervallo, cioè permette di dare una stima dell'errore su un intero intervallo $[a, b]$, si chiama *formula di Taylor col resto in forma di Lagrange*. Noi non faremo questa parte della teoria, poiché la mancanza di tempo impone delle scelte. Lo studente ha gli strumenti per consultare l'argomento sul testo (Par. 8.13), ora o in seguito.

L'impostazione e le notazioni sono leggermente diverse da quelle del testo, inoltre il teorema fondamentale (di esistenza dell'approssimazione) è dato in ipotesi più forti (ma sufficienti allo scopo del nostro corso). La "traduzione" fra i due linguaggi è data (in maniera analoga a quanto visto nella Sezione 5.1.1.) da

$$\begin{array}{ccl} \epsilon(h) & \iff & o(1) \text{ per } h \to 0 \\ \epsilon(h)h^n & \iff & o(h^n\ ) \text{ per } h \to 0 \end{array}$$

Anche in questo capitolo le funzioni saranno definite su intervalli e J rappresenterà un intervallo.

6.1 Settimana 9-14/11/09. Par. 8.11,8.12

6.1.1 Mercoledí 11/11/09

39-40. Abbiamo visto, per una funzione $f: J \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0, la *formula di Taylor del primo ordine di f in x_0* (col resto nella forma di Peano):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)(x - x_0).$$

Quando $x_0 = 0$, l'incremento della variabile indipendente è $h = x$ e si ottiene l'uguaglianza

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \epsilon(x)x\,,$$

detta *formula di MacLaurin del primo ordine di f*.

Definizione 6.1.1 (di formula di Taylor col resto nella forma di Peano)**.** *Sia* $f\colon J \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di variabile reale e* x_0 *un punto di* J*. La* formula di Taylor di ordine n di f in x_0 *col resto nella forma di Peano è un'uguaglianza del tipo*

$$f(x_0 + h) = T_n(h) + \epsilon(h)h^n,$$

dove $T_n(h)$ *è un polinomio di grado minore o uguale ad* n *(nella variabile* h*), detto* polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0 (o di centro x_0)*, e la funzione*

$$E_n\colon h \mapsto f(x_0 + h) - T_n(h) = \epsilon(h)h^n$$

è chiamata resto della formula *(ma sarebbe meglio chiamarla* errore della formula*). L'errore è il prodotto della potenza n-sima dell'incremento della variabile indipendente (*h^n*) per una funzione infinitesima in* x_0*. La formula di Taylor di centro* $x_0 = 0$ *si dice anche di* MacLaurin*. In tal caso anche il polinomio e il resto si dicono di MacLaurin (oltre che di Taylor di centro zero). Quando si vuole mettere in evidenza la funzione* f *ed il centro* x_0*, si usa la seguente notazione (confrontare anche il testo pg.207)*

$$T_n = T_n[f, x_0] = T_{n,f,x_0}.$$

Osservazioni.

- La formula di Taylor può anche essere scritta mediante la variabile x, riscrivere la precedente definizione in tale variabile.

- Ricordarsi che la scrittura $E_n(h) = \epsilon(h)h^n$ non è una uguaglianza, ma una proprietà.

- Se $f\colon J \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in J$, allora risulta $f(x_0 + h) = f(x_0) + \epsilon(h)$, e tale uguaglianza rappresenta la formula di Taylor di f di ordine zero in x_0.

- La formula di Taylor di centro x_0 di $f(x)$ non è altro che la formula di MacLaurin della funzione definita da $g(h) := f(x_0 + h)$. Cioè si possono sempre usare le più convenienti formule di McLaurin.

- Il polinomio di Taylor di ordine n di una funzione f avrà la seguente espressione:

  $$T_n(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n,$$

  dove $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono delle opportune costanti (che, come vedremo, sono univocamente associate ad f). Non è detto però che il grado di $T_n(h)$ sia proprio n (lo è soltanto quando $a_n \neq 0$). Non confondiamo quindi l'ordine di una formula di Taylor col grado del suo polinomio (che non deve superare l'ordine, ma può essere anche minore). In altre parole, l'ordine di una formula di Taylor si giudica dal resto, e non dal polinomio. Ad esempio, vedremo in seguito che le uguaglianze

  $$\sin(x) = x + \epsilon(x)x \quad \text{e} \quad \sin(x) = x + \epsilon(x)x^2$$

  sono entrambe vere. La prima è la formula di MacLaurin di $\sin(x)$ del prim'ordine e la seconda è del second'ordine. Entrambe hanno lo stesso polinomio di MacLaurin, ma la seconda, ovviamente, dà più informazioni della prima. Ad esempio, ci dice che la funzione

  $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)-x}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

  è continua in 0, un'affermazione vera che non può essere dedotta dalla prima formula (pur essendo anch'essa vera).

- **Attenzione:** la formula di Taylor di una funzione non è un'approssimazione della funzione, ma un'uguaglianza. Il polinomio di Taylor, invece, fornisce una buona approssimazione della funzione in un intorno del centro (più piccolo è l'intorno e più elevato è il grado del polinomio, migliore è l'approssimazione).

Definizione 6.1.2. *Dato un numero naturale n, il simbolo $n!$ (che si legge "enne fattoriale") denota il prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali ad n. È inoltre conveniente definire $0! = 1$ (ciò semplifica la scrittura di alcune formule).*

Esempio. $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, ecc. Calcolare $n!$ per $n = 4, \dots, 10$.

Teorema 6.1.1 (senza dimostrazione)**.** *Se $f\colon J \to \mathbb{R}$ è di classe C^n, allora, fissato $x_0 \in J$, si ha*

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \epsilon(h)h^n,$$

per ogni h ammissibile (ossia, tale che $x_0 + h \in J$).

Teorema 6.1.2. *Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ di classe C^n e sia $x_0 \in J$. Supponiamo che*

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_n h^n + \epsilon(h)h^n$$

per ogni h ammissibile (ossia, tale che $x_0 + h \in J$). Allora

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Dimostrazione(facoltativa). Il teorema di esistenza della formula di Taylor ci assicura che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \epsilon(h)h^n,$$

per ogni h ammissibile. Quindi, sottraendo le due uguaglianze, si ha

$$0 = (a_0 - f(x_0)) + (a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!})h + (a_2 - \frac{f''(x_0)}{2!})h^2 + \dots + (a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!})h^n + \epsilon(h)h^n,$$

per ogni h ammissibile (osserviamo infatti che la differenza di due funzioni $\epsilon(h)$ è ancora una funzione $\epsilon(h)$). Dobbiamo dunque dimostrare che se

$$0 = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + \epsilon(h)h^n\,, \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in J,$$

allora $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $\dots$, $c_n = 0$. Poiché la suddetta uguaglianza è vera anche per $h = 0$ (ricordarsi che $x_0 \in J$, e quindi $h = 0$ è ammissibile), si ottiene $c_0 = 0$. Conseguentemente, cancellando c_0, si ha

$$0 = c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + \epsilon(h)h^n, \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in J.$$

Pertanto, raccogliendo h, si ottiene

$$0 = h\,(c_1 + c_2 h + \dots + c_n h^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}), \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in J.$$

La funzione

$$c_1 + c_2 h + \dots + c_n h^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}$$

è dunque nulla per tutti gli $h \neq 0$ tali che $x_0 + h \in J$ e, di conseguenza, poiché è continua nel punto per $h = 0$ (essendo somma e prodotto di funzioni continue), possiamo concludere che è nulla anche per $h = 0$ (altrimenti si contraddirebbe il teorema della permanenza del segno per funzioni continue). Vale allora l'uguaglianza

$$0 = c_1 + c_2 h + \cdots + c_n h^{n-1} + \epsilon(h)h^{n-1}, \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in J.$$

Di conseguenza, ponendo $h = 0$, si deduce che anche il coefficiente c_1 deve essere nullo. Il risultato si ottiene procedendo allo stesso modo per passi successivi. □

Osservazione. Uno degli scopi della formula di Taylor è quello di esprimere il valore di una funzione f in un punto x tramite informazioni riguardanti il suo comportamento in un punto di riferimento x_0 (si osservi infatti che nella suddetta formula il polinomio di Taylor dipende esclusivamente dai valori assunti da f e dalle sue derivate in x_0). In generale non sarà possibile valutare con esattezza il valore di f in x conoscendo soltanto ciò che accade in x_0. Tuttavia, nella suddetta formula, tutto ciò che non riguarda il comportamento di f in x_0 è confinato in un solo termine: il resto della formula. Se nel valutare $f(x)$ si trascura il resto, si commette un errore, ma tale errore, talvolta, può essere maggiorato facilmente se si sa maggiorare il resto. Questa tecnica va comunemente sotto il nome di *formula di Taylor col resto in forma di Lagrange*, che noi non affronteremo in questo corso.

Esercizio da fare. Applicare il teorema di esistenza della formula di Taylor per determinare le seguenti formule di MacLaurin

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \epsilon(x)x^n$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+2}$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \epsilon(x)x^{2n+1}$
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+2}$
- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \epsilon(x)x^{2n+1}$
- $1/(1+x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \epsilon(x)x^n$
- $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \epsilon(x)x^n$, vedi l'esercizio 6.1.1 n.1.
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \epsilon(x)x^{2n}$, vedi l'esercizio 6.1.1 n.2.
- $\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) + \epsilon(x)x^{2n+1}$, vedi l'esercizio 6.1.1 n.3.

Corollario 6.1.1. *Se $f\colon J \to \mathbb{R}$ è di classe C^n, allora, fissato $x_0 \in J$, si ha*

$$T_{n-1}[Df, x_0] = DT_n[f, x_0]$$

Dimostrazione. Per esercizio, basta scrivere le due formule e confrontarle.

Esercizi 6.1.1 (da fare). *1. Applicare il precedente Corollario 6.1.1 per determinare la formula di MacLaurin della funzione $x \mapsto \ln(1+x)$.*

Svolgimento. *Poichè $D\ln(x) = 1/x$, possiamo scrivere*

$$T_{n-1}[\ln', 1](h) = 1 - h + h^2 + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}.$$

Definiamo il polinomio p_n con $p_n(h) = h - h^2/2 + \cdots + (-1)^{n-1}h^n/n$ e calcoliamo

$$D(T_n - p_n)(h) \equiv 0.$$

Poichè T_n e p_n sono funzioni di classe $C^1(\mathbb{R})$, possiamo applicare il punto 3 del Corollario (del Teorema di Lagrange) 5.1.1, per concludere che il polinomio $T_n - p_n$ è costante. Poichè $T_n(0) = \ln(1) = p_n(0) = 0$, otteniamo, con un semplice cambiamento del nome della variabile, che

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \epsilon(x)x^n.$$

2. *Usare il Teorema 6.1.2 e la formula di McLaurin della funzione $f(x) = 1/(1+x)$ per ottenere*
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \epsilon(x)x^{2n}$$
Suggerimento. *Usare il cambiamento di variabile $t = x^2$.*

3. *Usare il precedente punto e il Corollario 6.1.1 per ottenere la formula di McLaurin della funzione* arctan.

4. *Esempio di studio di funzione. Studiare la funzione definita da*
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}$$
Svolgimento. *Per prima cosa si nota che la funzione è pari e che $f \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash 0)$ (questo perchè quoziente di due funzioni di classe C^∞). Per analizzare il comportamento in $x = 0$, si usa la formula di McLaurin del seno e si ottiene*
$$f(x) = 1 + \epsilon(x) \quad se \quad x \neq 0.$$
Ne segue che l'incremento in 0 della funzione, $f(x) - 1 = \epsilon(x)$, è una funzione infinitesima, cioè f è continua in $x = 0$. Si noti che $f(0) = 1$ è l'unico valore che rende continua la funzione. Usando ancora la formula di McLaurin del seno otteniamo la seguente formula di McLaurin per f
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^i}{(2i+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+1} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!} + \epsilon(x)x^{2n+1},$$
quindi, per l'unicità della formula, otteniamo
$$D^k f(0) = 0 \quad se\ k\ è\ dispari,\ mentre \quad D^{2n} f(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$
Avendo tutte le derivate in $x = 0$, la funzione risulta di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, inoltre dalla precedente formula si deduce che f ha tangente orizzontale in $x = 0$ e ha un massimo locale in $x = 0$.

Poichè la funzione è pari ci limitiamo a studiarla per $x \geq 0$.

(a) $|f(x)| \leq |1/x|$ *e* $|f(x)| = |1/x| \iff x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$;

(b) $|f(x)| = 0 \iff x = k\pi,\ k \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$;

(c) $f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2},\ x \neq 0$

Dai punti 1 e 2 si deduce che il grafico di f oscilla fra i grafici $y = \pm 1/x$ e quindi che l'ampiezza dell'oscillazione si riduce progressivamente allontanandosi dall'origine. Si deduce inoltre che ci saranno infiniti punti di massimo e minimo relativo.

Il punto (c) ci dice che non si possono calcolare esattamente i punti di massimo e minimo relativo, ma il teorema di Rolle ci assicura che c'è un punto a tangente orizzontale in ogni intervallo $J_k = [k\pi, (k+1)\pi]$, $k > 0$. *Per assicurarci che tale punto è unico, tenendo conto che* $f'(k\pi + \pi/2) \neq 0$, *si può provare che i due grafici* $y = x$ *e* $y = \tan(x)$ *si incontrano una sola volta in* J_k. *Verificarlo graficamente e notare che l'intersezione* x_k *appartiene a* $(k\pi, k\pi + \pi/2)$.

Dal segno di f *si deduce che* x_k *è di minimo relativo se* k *è dispari, in quanto è di minimo per* $f_{|J_k}$ *(usare il teorema di Fermat per dimostrarlo); come conseguenza si ha anche che*

$$-1/(k\pi) < f(x_k) < -1/(k\pi + \pi/2).$$

Analogamente x_k *è di massimo relativo se* $k > 0$ *è pari e*

$$1/(k\pi) > f(x_k) > 1/(k\pi + \pi/2).$$

Si consiglia di studiare nei dettagli $f_{|[\pi,2\pi]}$ *e* $f_{|[2\pi,3\pi]}$ *usando tutti i teoremi fin qui svolti.*

In maniera analoga si prova che $f_{|[-\pi,\pi]}$, *ha un solo punto a tangente orizzontale in* $x = 0$ *che è quindi un punto di massimo.*

A questo punto si può disegnare il grafico e provare che

- *la funzione ha massimo uguale a* 1 *e un solo punto di massimo* $x = 0$
- *la funzione ha anche minimo uguale a* $f(x_1)$ *e due punti di minimo* $x = \pm x_1$

5. *Calcolare la generica formula di McLaurin di* $f(x) = \sinh(x^4)$

6.1.2 Venerdí 13/11/09

41-42.

Definizione 6.1.3 (di sommatoria, vedi anche il testo Par. 1.5.). *Si scrive*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \textit{oppure} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \ldots\ldots$$

e si legge sommatoria con con k *che va da* 1 *a* n *di* a_k.

Esercizi.

1. Verificare che la scrittura $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ rappresenta la somma dei primi n numeri naturali.
2. **Leggere sul testo le proprietà delle sommatorie** (Par. 1.5) osservando che discendono dalle proprietà algebriche dei numeri reali
3. Riscrivere tutte le formule riguardanti l'approssimazione di Taylor mediante il simbolo di sommatoria.

Definizione 6.1.4. *Dato un numero naturale* n *ed un numero naturale* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *il numero*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si chiama coefficiente binomiale *e si denota col simbolo* $\binom{n}{k}$ *che si legge "n su k" (da non confondere con il rapporto* n/k*).*

Osservazioni.

1. Si osserva che una delle due espressioni per la formula binomiale è definita anche per $k = 0$. Noi la assumiamo per definizione, cioè
$$\binom{n}{0} = 1\,.$$
2. Il coefficiente "n su k" è un numero naturale (vedi gli esercizi 6.1.2 n.1) e compare nello sviluppo di $(a+b)^n$ (chiamato *Binomio di Newton*)

Definizione 6.1.5. *Dato un numero reale α ed un numero naturale k, l'espressione*
$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$
si chiama coefficiente binomiale (generalizzato) *e si denota col simbolo*
$$\binom{\alpha}{k}$$
che si legge "α su k". Conviene inoltre definire analogamente a quanto fatto per $\alpha = n \in \mathbb{N}$
$$\binom{\alpha}{0} = 1\,.$$

Formula binomiale di McLaurin. $\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \epsilon(x)x^n.$

In particolare se $n \in \mathbb{N}$ $\qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$

Dimostrazione(facoltativa per esercizio). Basta applicare il teorema di esistenza della formula di Taylor. Perché nel caso di $n \in \mathbb{N}$ l'errore n-esimo è 0?

Esempi. Formule di McLaurin delle funzioni definite da
$$x \mapsto \frac{1}{1+x}\,,\ \sqrt{1+x}\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Le formule di McLaurin che sono fin qui apparse sul registro delle lezioni devono essere imparate a memoria.

Teorema 6.1.3. *Sia $f\colon J \to \mathbb{R}$ di classe C^n, $n > 0$, in un intervallo J e sia x_0 un punto interno a J. Supponiamo che*
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (ossia, supponiamo che la prima derivata che non si annulla in x_0 sia di ordine n). Se n è pari, allora x_0 è un punto estremante per f e, in particolare, è di minimo quando $f^{(n)}(x_0) > 0$ ed è di massimo quando $f^{(n)}(x_0) < 0$. Se invece n è dispari, allora x_0 non è un punto estremante.

Dimostrazione(facoltativa). Dalla formula di Taylor di centro x_0 e ordine n si ottiene
$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,h^n + \epsilon(h)h^n \quad (\forall\, h \ \text{ tale che } \ x_0 + h \in J).$$

Dunque,

$$\Delta f(x_0)(h) = \varphi(h)h^n \,,$$

dove $\Delta f(x_0)(h) = f(x_0+h) - f(x_0)$ è l'incremento subito dalla funzione f nel passare dal punto x_0 al punto x_0+h e $\varphi(h) = f^{(n)}(x_0)/n! + \epsilon(h)$. Supponiamo, per fissare le idee, che $f^{(n)}(x_0)$ sia positiva. Allora, $\varphi(0) > 0$, e quindi, essendo $\varphi(h)$ continua nel punto $h = 0$, per il teorema della permanenza del segno esiste un $\delta > 0$ per cui risulta $\varphi(h) > 0$ per ogni h tale che $|h| < \delta$. Dunque, se n è pari si ha $\Delta f(x_0)(h) > 0$ per $0 < |h| < \delta$ e, conseguentemente, x_0 è un punto di minimo relativo per f. Se invece n è dispari, si ha $\Delta f(x_0)(h) < 0$ per $-\delta < h < 0$ e $\Delta f(x_0)(h) > 0$ per $0 < h < \delta$, e pertanto x_0 non è un punto estremante. Il caso $f^{(n)}(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. □

Osservazione. Nelle ipotesi del precedente teorema posso scrivere

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \epsilon(x-x_0)(x-x_0)^n,$$

cioè il monomio $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ approssima l'incremento della funzione. Da un punto di vista intuitivo, il teorema precedente può essere giustificato nel seguente modo:

- il grafico della funzione, vicino al punto $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$, si comporta come il polinomio $T_n \colon x \mapsto f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, "quindi"
- disegno il grafico di T_n traslando nel punto P_0 il grafico del monomio $x \mapsto \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$
- osservo graficamente se si tratta di massimo, minimo locale o flesso, in dipendenza da n e dal segno di $f^{(n)}(x_0)$. Qual è l'unico valore di n per cui non si verifica nessuno dei tre precedenti fatti?

Quella data non è una dimostrazione, ma il teorema ci assicura che posso ragionare in questi termini.

Esercizi da fare.

1. Sia $f \colon J \to \mathbb{R}$ di classe C^n, $n > 0$, e sia x_0 un estremo dell'intervallo J. Supponiamo che la prima derivata che non si annulla in x_0 sia $f^{(n)}$. Usando il ragionamento intuitivo usato nella precedente osservazione stabilire, in dipendenza da n e dal segno di $f^{(n)}(x_0)$, se x_0 è di massimo o minimo locale (conta anche sapere se x_0 è il primo o secondo estremo). Inoltre (**facoltativo**) dimostrare il risultato ottenuto.
2. Sia $f \colon J \to \mathbb{R}$ di classe C^n e sia x_0 un punto interno all'intervallo J. Supponiamo che esista $n > 1$ tale che $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e che valga la seguente formula di Taylor.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \epsilon(x-x_0)(x-x_0)^n.$$

   Usando il ragionamento intuitivo usato nella precedente osservazione stabilire, in dipendenza da n e dal segno di $f^{(n)}(x_0)$, se x_0 è di flesso oppure la funzione è localmente concava o convessa (cioè esiste un intorno di x_0 tale che ......).
   Suggerimento. Studiare il segno di $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]$ e ricordarsi le proprietà delle funzioni concave o convesse espresse mediante la tangente al grafico.

Osservazione. Abbiamo visto che il teorema di esistenza della formula di Taylor è utile per trovare le formule di MacLaurin delle funzioni elementari (cioè quelle non esprimibili combinandone altre mediante operazioni di somma, prodotto, quoziente e composizione), per le altre funzioni è molto (ma molto) più pratico procedere combinando tra loro le formule di MacLaurin delle funzioni elementari, vedi anche i seguenti esercizi.

Esercizi 6.1.2. 1. *Provare la seguente formula (prima scrivere la formula per esteso e verificarla per $n = 2, 3$)*

$$p_n(x) := (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Svolgimento. *$p_n(x)$ è un polinomio di grado n, quindi possimo scrivere $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, anzi, dalla definizione di potenza n-sima, è facile vedere che $a_0 = a_n = 1$ e che tutti i coefficienti a_k sono interi. La precedente uguaglianza può anche essere vista come una formula di McLaurin di ordine n per la funzione p_n, se scrivo*

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \epsilon(x)x^n$$

dove $\epsilon(x)$ è la funzione costantemente uguale a 0 (la funzione nulla è infinitesima in 0, verificare la definizione). Per il teorema di unicità segue

$$a_k = p_n^{(k)}(0)/k!$$

Si osserva che $p_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$, $p_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$, continuando si vede che $p_n^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ e infine $p_n^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$. Valutando le derivate in 0 si ottine la formula desiderata.

2. *Usando il precedente esercizio provare la seguente formula (*Binomio di Newton*)*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Suggerimento. *Supponendo $a \neq 0$ (altrimenti la formula è banalmente verificata) si può scrivere $(a+b)^n = a^n(1+b/a)^n$. Quindi ponendo $x = b/a \ldots\ldots$*

3. *Scrivere la formula binomiale per $n = 1, 2$ per un generico α e per $\alpha = 1/3, -2, -1/3, 2/3$. Scrivere la formula binomiale di ordinr $k \leq n$ per il polinomio $p(x) = (1+x)^n$.*

4. *Col cambiamento di variabile $y = -x$, dedurre, dalla formula di MacLaurin di $1/(1+x)$, la formula di MacLaurin di $1/(1-x)$. Più in generale, calcolare la formula di MacLaurin di $(1-x)^\alpha$.*

5. *Calcolare la formula di McLaurin di ordine 4 di $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ e dedurne l'andamento locale della funzione*

6. *Calcolare la formula di McLaurin di ordine 2 di $f(x) = \ln(\cos(x))$ e dedurne che la funzione ha un punto di massimo locale in $x = 0$ (che è anche un massimo locale).*

7. *Determinare la generica formula di Taylor di $\ln(x)$.*
   Svolgimento. *Si deduce facilmente dalla formula di MacLaurin di $\ln(1+x)$. Fissato $x_0 > 0$, si ha infatti*

$$\ln(x_0 + h) = \ln\left(x_0(1 + \frac{h}{x_0})\right) = \ln(x_0) + \ln(1 + \frac{h}{x_0})$$

$$= \ln(x_0) + \frac{h}{x_0} - \frac{h^2}{2x_0^2} + \frac{h^3}{3x_0^3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{h^n}{nx_0^n} + \epsilon(h)h^n.$$

8. *Determinare la generica formula di Taylor di* $1/x$.
Svolgimento. *Fissato* $x_0 \in \mathbb{R}$, *si ha*

$$\frac{1}{x_0+h} = \frac{1}{x_0(1+h/x_0)} = \frac{1}{x_0} - \frac{h}{x_0^2} + \frac{h^2}{x_0^3} - \cdots + (-1)^n \frac{h^n}{x_0^{n+1}} + \epsilon(h)h^n.$$

9. *Calcolo di una formula di MacLaurin di una funzione combinata. Consideriamo la funzione* $f(x) = x^2 \sin(2x)$ *e determiniamone la formula di MacLaurin del quinto ordine. Si dovrà scrivere un'uguaglianza del tipo*

$$f(x) = p_5(x) + \epsilon(x)x^5,$$

dove $p_5(x)$ *è un polinomio di grado minore o uguale a cinque. Grazie alla presenza del termine* x^2, *è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del terzo ordine di* $\sin(2x)$, *e moltiplicarla poi per* x^2. *Si osservi infatti che il prodotto di* x^2 *per* $p_3(x) + \epsilon(x)x^3$, *dove* $p_3(x)$ *è un polinomio di grado non superiore a tre, diventa* $p_5(x) + \epsilon(x)x^5$, *dove* $p_5(x)$ *è di grado non superiore a cinque. Ricordiamo che per* $\sin(x)$ *si ha*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \epsilon(x)x^3.$$

Poiché tale uguaglianza è verificata per ogni numero x, *sostituendo il numero* $2x$ *al posto di* x *si ottiene*

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + 8\epsilon(2x)x^3 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Tenendo conto che $8\epsilon(2x)$ *è una funzione del tipo* $\epsilon(x)$, *si ha*

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \epsilon(x)x^3$$

e quindi

$$f(x) = x^2(2x - \frac{4}{3}x^3 + \epsilon(x)x^3) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \epsilon(x)x^5.$$

Provare che possiamo scrivere anche

$$f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \epsilon(x)x^6.$$

10. *Calcolo della derivata n-esima in un punto mediante la formula di Taylor. Determiniamo le derivate quarta e quinta e sesta nel punto* $x_0 = 0$ *della funzione* $f(x) = x^2\sin(2x)$. *Poiché abbiamo già provato che* $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^5 + \epsilon(x)x^6$, *il teorema di unicità della formula di Taylor ci assicura che* $f^{(4)}(0)/4! = f^{(6)}(0)/6! = 0$ *e* $f^{(5)}(0)/5! = -4/3$. *Quindi* $f^{(4)}(0) = f^{(6)} = 0$ *e* $f^{(5)}(0) = -160$.

11. *Calcolo di una formula di Taylor di centro* $x_0 \neq 0$. *Calcoliamo la formula di Taylor del quarto ordine e centro* $x_0 = -1$ *di*

$$f(x) = 2x + (x+1)^2\cos(\pi x)\,.$$

Poiché il centro x_0 *non è zero, conviene effettuare la sostituzione*

$$x = x_0 + h = -1 + h\,.$$

In questo modo è come se si calcolasse la formula di MacLaurin di $g(h) := f(-1+h)$.

Si ha

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= 2(-1+h) + h^2\cos(\pi h - \pi) \\ &= -2+2h+h^2[\cos(\pi h)\cos(-\pi) - \sin(\pi h)\sin(-\pi)] \\ &= -2+2h-h^2\cos(\pi h) = -2+2h-h^2(1-\frac{\pi^2}{2}\,h^2+\epsilon(h)h^3) \\ &= -2+2h-h^2+\frac{\pi^2}{2}\,h^4+\epsilon(h)h^5. \end{aligned}$$

Si osserva che $p(h) = -2+2h-h^2+\frac{\pi^2}{2}\,h^4$ *è l'approssimazione della funzione sia del quarto che del quinto ordine (perchè?).*

Supponiamo ora di voler calcolare la derivata quarta nel punto $x_0 = -1$ *della funzione*

$$f(x) = 2x + (x+1)^2\cos(\pi x).$$

Dato che di $f(x)$ *abbiamo già determinato la formula di Taylor del quarto ordine in* $x_0 = -1$*, è sufficiente applicare il teorema di unicità della formula di Taylor, il quale ci assicura che* $f^{(4)}(-1)/4!$ *coincide col coefficiente* $\pi^2/2$ *del monomio di quarto grado di detta formula. Pertanto*

$$f^{(4)}(-1) = \frac{\pi^2}{2}\,4! = 12\pi^2.$$

Quanto vale la derivata quinta?

Ulteriori importanti esempi di applicazioni della formula di Taylor si avranno nel calcolo dei limiti.

Capitolo 7

Limiti delle funzioni reali di una variabile reale.

In questo capitolo affronteremo la definizione di limite seguendo sostanzialmente l'impostazione del testo di riferimento (e di qualsiasi altro testo).

7.1 Settimana 16-25/11/09. Par.4.1-4.3, 8.12.1

7.1.1 Mercoledì 18/11/09.

43-44. Con il concetto di limite si intende descrivere il comportamento dei valori $f(x)$ di una funzione, quando la variabile x si "avvicina" ad un valore x_0 o si "allontana indefinitamente" in direzione positiva o negativa sull'asse x. In particolare i valori $f(x)$ si possono "avvicinare" ad un valore $\ell \in \mathbb{R}$ o "allontanare indefinitamente" in direzione positiva o negativa sull'asse y. Per esprimere questi concetti diamo le seguenti definizioni.

Definizione 7.1.1. *Con la notazione* $\mathbb{R}^*$ *intendiamo l'insieme dei* numeri reali estesi*, ossia l'insieme costituito dai numeri reali con l'aggiunta dei simboli* $-\infty$ *e* $+\infty$*.*

$$\mathbb{R}^* = \{-\infty, \infty, a : a \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{R}^*$ *estendiamo la* relazione d'ordine *con:*

$$-\infty < a < +\infty\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

È utile definire anche i simboli

$$a^+\,, \quad a^-\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Intorni in $\mathbb{R}^*$:
gli intorni di $a \in \mathbb{R}$ *sono* $I = (a - \delta, a + \delta)$*,*
gli intorni di a^+ *sono gli intorni destri di* a*,* $I = [a, a + \delta)$*,*
gli intorni di a^- *sono gli intorni sinistri di* a*,* $I = (a - \delta, a]$*,*
gli intorni di $-\infty$ *sono le semirette negative* $I = (-\infty, a)$*,*
gli intorni di $+\infty$ *sono le semirette positive* $I = (a, +\infty)$*.*

Definizione 7.1.2. *Sia* α *uno dei seguenti simboli:* a*,* a^-*,* a^+*,* $-\infty$*,* $+\infty$*. Un* intorno forato *di* α *è un intorno di* α *privato del punto* α*.*

Ovviamente i simboli a^- e a^+ come numeri reali rappresentano ancora a. Quindi, ad esempio, togliere a^- dal suo intorno $(a - \delta, a]$ significa togliere a (si ottiene così l'intorno forato $(a - r, a)$ di a^-). Inoltre gli intorni forati di $\pm\infty$ sono gli intorni stessi.

Definizione 7.1.3. *Sia α uno dei seguenti simboli: a, a^-, a^+, $-\infty$, $+\infty$. α si dice di accumulazione per l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ se per ogni intorno forato V di α l'insieme $V \cap A$ è non vuoto. In particolare $+\infty$ $(-\infty)$ è di accumulazione per A se se e solo se A è superiormente (inferiormente) limitato. Inoltre se a^+ (a^-) è di accumulazione per A, si dice anche che a è di accumulazione destro (sinistro) per A.*

Se $a \in A$ non è di accumulazione per A, si dice che a è un punto isolato di A

Definizione 7.1.4. *Si dice che una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$ ha la proprietà $\mathcal{P}$* definitivamente per *$x \to \alpha$, se α è di accumulazione per D_f ed esiste un intorno forato U di α tale che la proprietà $\mathcal{P}$ vale per $f_{|U\cap D_F}$.*

Esempi.

1. Se I è un intervallo non degenere, cioè diverso da $\emptyset$ e da $\{a\}$, ogni elemento $\alpha \in I \cup \{\inf I,\ \sup I\} \subset \mathbb{R}^*$ è di accumulazione per I.
2. Il solo punto di accumulazione di $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ è lo zero.
3. Il solo elemento di $\mathbb{R}^*$ che sia di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$.
4. $x^3 \pm 10^3 \sin(x) > x^2$ definitivamente per $x \to +\infty$.
5. Il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ è definiyivamente crescente per $x \to +\infty$

Definizione 7.1.5 (di limite finito-finito)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia x_0 un punto di accumulazione per il dominio A di f (non occorre che x_0 appartenga ad A). Si dice che $f(x)$* tende ad un numero reale l per x che tende ad x_0, *e si scrive $f(x) \to l$ per $x \to x_0$, oppure*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che da $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ segue $|f(x) - l| < \epsilon$.

Osservazioni

1. Si noti che nella precedente definizione contano solo i valori che f assume in un intorno forato di x_0.
2. Si ricorda che abbiamo già dato la precedente definizione per le funzioni definite sugli intervalli, vedi la Definizione 3.1.2. La differenza consiste solo nella natura dell'insieme, ad esempio sia

$$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad f : x \in A \mapsto x^2 .$$

   L'unico limite di f che posso fare è quello per $x \to 0$, inoltre è facile vedere (e lo studente lo verifichi usando la definizione) che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

3. Affermare che $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$ equivale ad affermare che: per ogni intorno fissato V di ℓ, $f(x) \in V$, definitivamente per $x \to x_0$. Come conseguenza, abbiamo $f(x) \to 3$ per $x \to -5$ se e solo se: per ogni $\epsilon > 0$ fissato, $|f(x) - 3| < \epsilon$, definitivamente per $x \to -5$.
4. Ricordiamo che (nel caso di funzioni definite su intervalli) f è continua in x_0 se e solo se $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$.

5. Si fa notare che il concetto di limite per $x \to x_0$ di una funzione è definito soltanto quando x_0 è un punto di accumulazione per il dominio della funzione ma non occorre che appartenga al dominio, mentre per la continuità il punto deve stare nel dominio.

6. Ricordiamo che se $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ e $x_0 \notin D_f$, allora f è estendibile per continuità a x_0.

7. Ricordiamo che f è derivabile in x_0 se e solo se.....

8. Se due funzioni coincidono in un intorno forato di un punto x_0, allora hanno lo stesso limite per $x \to x_0$ (se esiste). Provarlo per esercizio.

9. **Unicità del limite.** Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to l_1$ e $f(x) \to l_2$, allora $l_1 = l_2$. Provarlo per esercizio.
   Suggerimento. Provarlo per assurdo fissando $\epsilon = |l_1 - l_2|/2$ e sfruttando il fatto che x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di f.

10. Cosa succederebbe se nella definizione di limite per $x \to x_0$ prendessimo in considerazione il caso "x_0 isolato"?

Esempi.

1. Si ha che $\operatorname{sgn}(x^2) \to 1$ per $x \to 0$ (pertanto la funzione definita da $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2)$ non è continua nel punto $x_0 = 0$). Lo studente verifichi il precedente limite usando la definizione.

2. Il dominio della funzione definita da $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$ è costituito soltanto da punti isolati e non ha punti di accumulazione, pertanto non ha senso il limite per x che tende ad un qualunque punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$

4. Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x) + 1 - \cos(2x)}{x^2 + |x|x^2\cos(3|x|)}\,.$$

   Osserviamo che il denominatore della funzione di cui si vuol calcolare il limite può essere scritto nella forma $x^2 g(x)$, dove $g : x \mapsto 1 + |x|\cos(3|x|)$ è una funzione continua e non nulla per $x_0 = 0$. Pertanto, per calcolare il limite, è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del secondo ordine del numeratore. Infatti, in un intorno forato di $x_0 = 0$, abbiamo

$$\frac{x\sin(x) + 1 - \cos(2x)}{x^2 + |x|x^2\cos(3|x|)} = \frac{x(x + x\epsilon(x)) + 2x^2 + x^2\epsilon(x))}{x^2 g(x)} = \frac{3 + x\epsilon(x)}{g(x)}\,.$$

   Ma $\frac{3+x\epsilon(x)}{g(x)}$ è continua in $x_0 = 0$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x) + 1 - \cos(2x)}{x^2 + |x|x^2\cos(3|x|)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + \epsilon(x)}{g(x)} = \frac{3 + \epsilon(0)}{g(0)} = 3\,.$$

   □

Si potrebbe continuare a dare tutte le possibili definizioni di limite nei seguenti venticinque casi: $f(x)$ tende a l, l^-, l^+, $-\infty$, $+\infty$ per x che tende a x_0, x_0^-, x_0^+, $-\infty$, $+\infty$. È invece più semplice dare un'unica definizione valida per tutti i casi, mettendo così in evidenza come il concetto di limite, così fondamentale in Analisi Matematica, sia in realtà unico. Per questo occorre che sia chiaro il concetto di intorno (e di intorno forato) di uno qualunque dei simboli a, a^-, a^+, $-\infty$, $+\infty$, che abbiamo definito in $\mathbb{R}^*$. Nella definizione che segue la lettera α rappresenta uno qualunque dei simboli x_0, x_0^-, x_0^+, $-\infty$, $+\infty$ e la lettera γ uno qualunque dei simboli l, l^-, l^+, $-\infty$, $+\infty$ (x_0 e l sono numeri reali).

Definizione 7.1.6. *Supponiamo che α sia un punto di accumulazione per il dominio D_f di una funzione f. Si dice che $f(x)$* tende a γ per x che tende ad α *(si scrive $f(x) \to \gamma$ per $x \to \alpha$) se per ogni intorno V di γ esiste un intorno forato U di α tale che se $x \in U$ e $x \in D_f$ allora $f(x) \in V$. Come per il caso di limite finito–finito, per indicare che $f(x) \to \gamma$ per $x \to \alpha$ si usa anche dire che il* limite per x che tende ad α di $f(x)$ è uguale a γ*, e si scrive*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \gamma.$$

Esempi e complementi.

1. (Definizione equivalente di limite laterale). Sia x_0 un punto di accumulazione destro per il dominio di $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ tende ad γ per x che tende ad x_0^+ (o per x che tende ad x_0 da destra) se per ogni intorno V di γ esiste $\delta > 0$ tale che da $x_0 < x < x_0 + \delta$ e $x \in A$ segue $f(x) \in \gamma$. In questo caso si scrive anche
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \gamma$$
Analogamente, se x_0 è un punto di accumulazione sinistro per A, si dice che $f(x) \to \gamma$ per $x \to x_0^-$ se... (completare per esercizio).

2. **Teorema.** Sia x_0 un punto di accumulazione bilatero (cioè sia sinistro che destro) per il dominio di $f\colon A \to \mathbb{R}$. Allora $f(x) \to \gamma$ ($\gamma = l, l^\pm, +\infty, -\infty$) per $x \to x_0$ se e solo se
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \gamma\,.$$
Provare il teorema per esercizio e, mostrare come applicazione che il limite di $\operatorname{sgn}(x)$ per $x \to 0$ non esiste.

3. (Definizione equivalente di limite per eccesso e difetto nel caso finito–finito). $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$ (ℓ^-) si legge anche $f(x)$ tende a ℓ^+ (risp. ℓ^-) per x che tende ad x_0 significa che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ **e** $f(x) \geq \ell$ ($\leq \ell$) in un intorno forato di x_0 In questo caso si dice anche che ℓ *è il limite per eccesso (difetto) di $f(x)$ per $x \to x_0$*.

4. (Definizione equivalente di limite per eccesso e difetto). Si ha che $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell^+$ (ℓ^-) significa che
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \quad \textbf{e} \quad f(x) \geq \ell \ (\leq \ell) \text{ in un intorno forato di } \alpha.$$
In questo caso si dice anche che ℓ *è il limite per eccesso (difetto) di $f(x)$ per $x \to \alpha$*. Verificarlo per esercizio.

5. (Definizione equivalente di limite finito–infinito). $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$) si legge anche $f(x)$ tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per x che tende ad x_0 e significa che per ogni $k > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che da $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ segue $f(x) > k$ (risp. $f(x) < -k$).

6. (Definizione equivalente di limite laterale nel caso finito–infinito). $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ si legge anche $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende ad x_0^+ e significa che per ogni $k > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che da $x_0 < x < x_0 + \delta$ e $x \in A$ segue $f(x) > k$
7. (Definizione equivalente di limite infinito–finito). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si legge anche $f(x)$ tende a ℓ per x che tende ad $+\infty$ e significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che da $x > h$ e $x \in A$ segue $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
8. Dare le definizioni estese dei rimanenti casi
9. Dai grafici delle "funzioni elementari" dedurre i loro limiti per $x \to \alpha$, dove α è un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^*$ di accumulazione per il loro dominio.

Esercizi 7.1.1. *1. Affermare che $f(x) \to \beta$ per $x \to \alpha$ equivale ad affermare che: per ogni intorno fissato V di β, $f(x) \in V$, definitivamente per $x \to \alpha$. Quindi abbiamo $f(x) \to 3$ per $x \to -\infty$ se e solo se: per ogni $\epsilon > 0$ fissato, $|f(x) - 3| < \epsilon$, definitivamente per $x \to -\infty$.*

2. Dare esempi simili al precedente per altri tipi di limite.

3. Prima graficamente e poi usando la definizione verificare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^\pm} sgn(x) = \pm 1, \quad \lim_{x\to 0} |x| = 0, \quad \lim_{x\to 0} (x)^a = 0,\ a \in \mathbb{R}^+$$

4. Descrivere la relazione fra limite destro (sinistro) e i concetti di funzione continua e derivabile a destra (sinistra).

5. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty\,.$$

Svolgimento. *Fissato un arbitrario $k > 0$, studiamo la disequazione $1/x^2 > k$ e proviamo che è soddisfatta in un intorno forato di $x_0 = 0$ (cioè un intorno di x_0 privato del punto x_0). Dato che x^2 e k sono positivi (ricordarsi che $x \neq 0$), tale disequazione è equivalente a $0 < x^2 < 1/k$. Quindi $1/x^2 > k$ se (e solo se) $0 < |x| < 1/\sqrt{k}$. Di conseguenza, un qualunque intorno forato di raggio (positivo) $\delta \leq 1/\sqrt{k}$ fa al caso nostro.*

6. Usando la definizione verificare che la funzione $f(x) = 1/x$ tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$.

Svolgimento. *Fissiamo $k > 0$ e determiniamo $\delta > 0$ in modo che si abbia $1/x < -k$ per $x \in (-\delta, 0)$. Occorre quindi studiare la disequazione $1/x < -k$. Poiché $x < 0$, moltiplicando per x entrambi i membri della disequazione si ottiene $1 > -kx$. Moltiplicando ancora entrambi i membri per $-1/k$ risulta $-1/k < x$. Tenendo ancora conto che $x < 0$, possiamo concludere che la disequazione $1/x < -k$ è verificata per $x \in (-\delta, 0)$, dove $\delta = 1/k$.*

7. Usando la definizione verificare che la funzione $1/x$ tende a zero per $x \to -\infty$ (anche per $x \to +\infty$).

Svolgimento. *Fissato $\epsilon > 0$, mostriamo che esiste un intorno di $-\infty$ (cioè una semiretta sinistra) in cui è soddisfatta la disequazione $|1/x| < \epsilon$. Poiché $x \to -\infty$ si può supporre che x sia negativo (infatti per la verifica del limite basta restringere la funzione $1/x$ all'intorno $(-\infty, 0)$ di $-\infty$). Per $x < 0$ la disequazione $|1/x| < \epsilon$ è equivalente a $-1/x < \epsilon$. Moltiplicando per x entrambi i membri di quest'ultima* *disequazione (e tenendo conto che x è negativo) si ottiene $-1 > \epsilon x$. Dato che $\epsilon > 0$, dalla moltiplicazione di entrambi i membri dell'ultima disequazione per $1/\epsilon$ si ottiene $-1/\epsilon > x$. Possiamo quindi concludere che, fissato $\epsilon > 0$, la disuguaglianza $|1/x| < \epsilon$ è soddisfatta per $x < -1/\epsilon$ (o un qualunque altro numero minore di $-1/\epsilon$).*

8. *Usando la definizione provare i seguenti limiti (x_0 è un numero reale)*

$$\lim_{x\to x_0^\pm} 1/(x-x_0) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x\to x_0^\pm} 1/(x-x_0)^2 = +\infty\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} 1/(x-x_0) = 0^\pm.$$

Stabilire inoltre per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste il limite per $x \to x_0$ di $1/(x-x_0)^n$.

9. *Usando la definizione provare che $\lim_{x\to\pm\infty} 1/(x-x_0)^n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > 0$. Determinare inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, quali dei precedenti limiti sono per difetto o per eccesso.*

10. *Abbiamo visto con degli esempi che per verificare un limite (cioè per provare la veridicità di un limite mediante la definizione) occorre studiare una disequazione. Si osservi, però, che non importa trovarne tutte le soluzioni (talvolta è un'impresa impossibile senza ricorrere ai metodi numerici): è sufficiente provare che la disequazione è soddisfatta in un intorno forato del punto a cui tende la variabile indipendente. Ad esempio, facciamo la verifica del seguente limite:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x^3+2+\sin(x)} = 0\,.$$

Fissato $\epsilon > 0$, occorre provare che la disequazione

$$\left|\frac{1}{x^2+x^3+2+\sin(x)}\right| < \epsilon$$

è soddisfatta in un intorno di $+\infty$ (ossia in una semiretta del tipo $(h, +\infty)$). Per far ciò è conveniente maggiorare

$$\left|\frac{1}{x^2+x^3+2+\sin(x)}\right|$$

con una funzione più semplice $g(x)$ per la quale risulti facile verificare che $g(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Innanzi tutto, poiché $x \to +\infty$, si può supporre che $x > 0$ (basta restringere la funzione alla semiretta $(0, +\infty)$). Avendo supposto ciò, si ha

$$\left|\frac{1}{x^2+x^3+2+\sin(x)}\right| = \frac{1}{x^2+x^3+2+\sin(x)} \le \frac{1}{x^2+x^3+2-1} < \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2}.$$

Dunque, la disequazione iniziale è indubbiamente verificata se $1/x^2 < \epsilon$, e questo accade nella semiretta $x > h := 1/\sqrt{\epsilon}$.

7.1.2 Venerdì 20/11/09

45-46.

Definizione 7.1.7. *Sia f una funzione definita su una semiretta positiva (negativa). Se $f(x)$ tende a ℓ per x che tende a $+\infty$ $(-\infty)$, si dice che* la retta di equazione $y = \ell$ è un asintoto orizzontale *che viene detto anche* asintoto orizzontale destro (sinistro).

Definizione 7.1.8. *Sia f una funzione definita in un intorno forato di x_0^+ (x_0 può appartenere o no al dominio di f). Se $f(x)$ tende a $+\infty$ $(-\infty)$ per x che tende a x_0^+, si dice che* la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale *che viene detto anche* asintoto verticale destro. *Analoga definizione si da per* l'asintoto vertivale sinistro.

Per calcolare i limiti delle funzioni combinate conviene estendere (solo parzialmente però) a $\mathbb{R}^*$ le operazioni di somma e prodotto. $\mathbb{R}^*$, con le operazioni estese, viene detto *algebra dei reali estesi* o anche *algebra dei limiti.* Definiamo:

$$\pm\infty + a = \pm\infty\,, \quad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$a\,(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0, \end{cases}, \quad (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0\,, \quad 1/0^{\pm} = \pm\infty\,, \quad 1/\pm\infty = 0^{\pm}\,.$$

Non sono invece definite le seguenti espressioni, dette *forme indeterminate*:

$$(+\infty) + (-\infty)\,, \quad 0/0\,, \quad 0\,(\pm\infty)\,, \quad (\pm\infty)/(\pm\infty).$$

Numerosi altri casi si ottengono facilmente dai precedenti, ad esempio:

$$\frac{-2}{0^+} = (-2)\cdot\frac{1}{0^+} = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty\,,$$

$$\frac{-\infty}{0^-} = (-\infty)\cdot\frac{1}{0^-} = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\,.$$

Il risultato che segue facilita il calcolo dei limiti evitando di ricorrere ogni volta alla definizione. Ovviamente per dimostrarlo la definizione è inevitabile.

Teorema 7.1.1 (senza dimostrazione)**.** *Siano f_1 ed f_2 due funzioni reali di variabile reale. Supponiamo che per $x \to \alpha$ risulti $f_1(x) \to \gamma_1$ e $f_2(x) \to \gamma_2$. Allora, quando (nei reali estesi) ha senso, per $x \to \alpha$ si ha:*

1) $f_1(x) + f_2(x) \to \gamma_1 + \gamma_2$*;*

2) $f_1(x)f_2(x) \to \gamma_1\gamma_2$*;*

3) $f_1(x)/f_2(x) \to \gamma_1/\gamma_2$*.*

Esempio. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Si noti che nel calcolo del limite è essenziale sapere che, per x che tende a $(\pi/2)^-$, non solo $\cos(x) \to 0$, ma anche che $\cos(x) \to 0^+$.

Significato delle forme indeterminate Riportiamo alcuni esempi per mostrare come, nell'algebra dei reali estesi, non sia conveniente definire le *forme indeterminate.* Ogni definizione infatti porterebbe a delle incongruenze. Il significato di forma indeterminata è il seguente: se il limite della somma o del prodotto di due funzioni si presenta in forma indeterminata, senza ulteriori informazioni sulle funzioni, non è possibile concludere niente, ovvero tutto può accadere. Ad esempio, se per lo studio del limite per $x \to +\infty$ di $f_1(x)+f_2(x)$ si sa soltanto che $f_1(x) \to +\infty$ e $f_2(x) \to -\infty$ non possiamo concludere niente sul comportamento di $f_1(x)+f_2(x)$. Ovviamente, se invece possiamo precisare che $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = -x$, allora possiamo dedurre: $x^2 - x = x(x-1)$, quindi, in base al teorema fondamentale per il calcolo dei limiti, si ottiene $x(x-1) \to (+\infty)\cdot(+\infty-1) = +\infty$". Ecco quattro esempi di coppie di forme (apparentemente) indeterminate dal comportamento contrastante:

$$\begin{array}{lll} (\pm\infty - (\pm\infty)) & x - x \to 0 & \text{per } x \to +\infty; \\ (\pm\infty - (\pm\infty)) & x^2 - x \to +\infty & \text{per } x \to +\infty; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (0\,(\pm\infty)) & x(1/x) \to 1 & \text{per } x \to 0; \\ (0\,(\pm\infty)) & x^2(1/x) \to 0 & \text{per } x \to 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (0/0) & x/x \to 1 & \text{per } x \to 0; \\ (0/0) & x^2/x \to 0 & \text{per } x \to 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (\pm\infty/\pm\infty) & x/x \to 1 & \text{per } x \to +\infty; \\ (\pm\infty/\pm\infty) & x^2/x \to +\infty & \text{per } x \to +\infty. \end{array}$$

Esercizi 7.1.2. *1. Determinare graficamente se i seguenti limiti esistono e quanto valgono (x_0 è un numero reale)*

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} 1/(x-x_0)^n,\ n\in\mathbb{N}, \qquad \lim_{x\to x_0} 1/(x-x_0)^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Giustificare i risultati ottenuti con la teoria fin qui svolta.

2. *Verificare che una funzione f definita su un intervallo J è continua in un punto x_0 interno a J se e solo se*

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0)$$

3. *Rivedere tutti gli esercizi fatti sulle funzioni definite a tratti alla luce del precedente risultato.*

4. **Guardare sul testo la definizione di cuspide e punto a tangente verticale** *e confrontarla con la Definizione 5.2.4.*

5. *Calcolare* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x^2}$.

Svolgimento 1. Osserviamo che è sufficiente determinare la formula di MacLaurin del secondo ordine della funzione al numeratore (non ci preoccupa, infatti, calcolare il limite del rapporto tra il resto di detta formula e il denominatore). Ricordando gli sviluppi di MacLaurin di seno ed esponenziale scriviamo

$$e^{\sin(x)} = e^{x+\epsilon(x)x^2} = 1 + \big(x+\epsilon(x)x^2\big) + \frac{1}{2}\big(x+\epsilon(x)x^2\big)^2 + \epsilon\big(x+\epsilon(x)x^2\big)\big(x+\epsilon(x)x^2\big)^2$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Si abbia cura di provare che la funzione

$$\epsilon(x)x^2 + \epsilon(x)x^3 + \frac{1}{2}\epsilon(x)^2x^4 + \epsilon\big(x+\epsilon(x)x^2\big)\big(1+\epsilon(x)x\big)^2x^2$$

è del tipo $\epsilon(x)x^2$. Segue

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \epsilon(x)\right) = +\infty + \frac{1}{2} + 0 = +\infty.$$

Svolgimento 2. Dall'uguaglianza

$$e^x = 1 + x + \epsilon(x)x$$

si deduce che

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \epsilon(\sin(x))\sin(x).$$

Quindi, ricordando che $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ *per* $x \to 0$*, si ottiene*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{\sin(x)}{x} + \epsilon(\sin(x))\frac{\sin(x)}{x}\right) = +\infty \cdot (1 + \epsilon(0)\cdot 1) = +\infty.$$

6. *Calcolare* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 + x + 3}{4x^2 - 2x + 1}$.

7. *Calcolare* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 + x}{4x^2 - 2x}$.

   Svolgimento. Per $x \neq 0$*, vale* $\dfrac{x^3 + x}{4x^2 - 2x} = \dfrac{x^2 + 1}{4x - 2}$*. Questa nuova funzione è continua nell'origine dove assume valore* $-1/2$*. Quindi*

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x}{4x^2 - 2x} = -\frac{1}{2}.$$

8. *Limiti delle funzioni razionali:* **fondamentale***, vedi anche il testo.*

9. *Determinare il polinomio di McLaurin di grado 2 della funzione* $\cos(\pi + x)$ *e usarlo per determinare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione* $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ *attorno al punto* $x_0 = \pi^2$*. Calcolare quindi, al variare di* $n \in \mathbb{N}$*, se esiste,*

   $$\lim_{x\to \pi^2} \frac{f(x) + 1}{x^n}$$

10. *Calcolare, se esistono i seguenti limiti.*

    $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \log(1 + x^2)}{x^4 + x^7}.$$

    $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sin(x) + \frac{1}{2}x^2 - 1}{3x^3 + 8x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 1 - 2\cos(x)}{x + 11x + 3x^8}.$$

11. *Studiare le seguenti funzioni, determinandone anche gli eventuali asintoti.*

    $$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 4}, \qquad f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}},$$

    $$f(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}, \qquad f(x) = \log\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right).$$

7.2 Settimana 23-28/11/09. Par. 4.3, 8.12.1

7.2.1 Mercoledì 25/11/09.

47-48. I seguenti due teoremi sono casi particolari (ma sufficienti per gli scopi del corso) di un teorema più generale che può essere enunciato sulla relazione fra limite e composizione di funzioni.

Teorema 7.2.1 (del cambiamento di variabile per funzioni continue)**.** *Siano f e g due funzioni continue definite su intervalli. Se $f(x) \to \beta$ per $x \to \alpha$ e $g(x) \to \gamma$ per $x \to \beta$, allora si ha*

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \lim_{y\to\beta} g(y) = \gamma.$$

Teorema 7.2.2 (del passaggio al limite per funzioni continue)**.** *Siano f e g due funzioni reali di variabile reale. Se $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to \alpha$ e g è continua in l, allora quando ha senso (cioè quando α è un punto di accumulazione per $g \circ f$) si ha*

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right) = g(l).$$

Esercizio da fare. Riflettere sulla differenza fra i due teoremi e (**facoltativo**) provare il precedente teorema.

Teorema di de L'Hôpital per il calcolo delle forme indeterminate, vedi testo.

Esempi: limiti notevoli.

- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x^r = 0, \forall r > 0$
- $\lim_{x\to+\infty} x^r/e^x = 0, \forall r > 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^r e^x = 0\,,\ \forall r > 0.$

Esercizio da fare. Usando il cambiamento di variabile dimostrare che da $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ segue:

a. $\lim_{x\to 0} x^a \ln(x) = 0,\ \forall a > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
Suggerimento. Nel primo caso usare la sostituzione $y = x^a$, nel secondo caso usare la sostituzione $y = 1/x$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, sostituzione consigliata $y = e^{-x}$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$, sostituzione consigliata $y = e^x$. Dimostrare inoltre che, per ogni $r < 1$, da b. segue $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^r}{e^x} = 0$ e da c. segue $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^r\,e^x = 0.$

Risultati fondamentali

1. *Unicità del limite*, vedi il testo.
2. *Permanenza del segno per i limiti*, vedi il testo.
3. (Del confronto dei limiti). *Siano $f_1, f_2\colon A \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per A. Supponiamo $f_1(x) \le f_2(x)$ per ogni $x \in A$. Se, per $x \to \alpha$, $f_1(x) \to \gamma_1$ e $f_2(x) \to \gamma_2$, allora $\gamma_1 \le \gamma_2$.*

   Dimostrazione (**facoltativa**). Caso $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Supponiamo (per assurdo) $\gamma_1 > \gamma_2$. Poiché per $x \to \alpha$ la funzione $f_1(x) - f_2(x)$ tende a $l = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$, fissato $\epsilon = l$, esiste un intorno forato U di α tale che per ogni $x \in U \cap A$ si ha $l - \epsilon < f_1(x) - f_2(x) < l + \epsilon$. Quindi, dato che $l - \epsilon = 0$, per tali x (la cui esistenza è assicurata dall'ipotesi che α sia un punto di accumulazione) risulta $f_1(x) > f_2(x)$, in contrasto con l'ipotesi $f_1(x) \le f_2(x)$. Gli altri casi (cioè quando almeno uno dei due limiti non è finito) si dimostrano in maniera analoga, e sono lasciati per esercizio al lettore. □

4. (Dei carabinieri). *Siano $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ tre funzioni reali di variabile reale e sia α un punto di accumulazione per A. Supponiamo $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in A$. Se $f(x) \to \gamma$ e $h(x) \to \gamma$ per $x \to \alpha$, allora anche $g(x) \to \gamma$ (per $x \to \alpha$).*

   Dimostrazione (**facoltativa**). Caso $\gamma \in \mathbb{R}$. Fissiamo $\epsilon > 0$. Poiché $f(x) \to \gamma$, esiste un intorno forato U di α tale che per ogni $x \in U \cap A$ si ha $\gamma - \epsilon < f(x) < \gamma + \epsilon$. Dato che anche $h(x) \to \gamma$, esiste un intorno forato W di α tale che $x \in W \cap A \implies \gamma - \epsilon < h(x) < \gamma + \epsilon$. Di conseguenza, se $x \in A$ appartiene all'intorno forato $U \cap W$ di α, si ha
   $$\gamma - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \gamma + \epsilon\,.$$
   Tenendo conto soltanto di ciò che ci serve, si ottiene $\gamma - \epsilon < g(x) < \gamma + \epsilon$ per ogni $x \in U \cap W \cap A$, e la definizione di limite è verificata. I due casi $\gamma = -\infty$ e $\gamma = +\infty$ sono lasciati per esercizio allo studente. $\square$

   Esercizio obbligatorio. Nel teorema dei carabinieri, nei casi in cui $\gamma = -\infty$ o $\gamma = +\infty$, uno dei carabinieri è superfluo (quale?).

5. **Teorema** (senza dimostrazione, vedi anche il testo a pg. 197, Teorema 8.12.). Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lambda$ allora $\lim_{h\to 0^+}(f(a + h) - f(a))/h = \lambda$

   Enunciare un teorema analogo al precedente per l'estremo destro.

   Questo teorema è particolarmente utile per stabilire la derivabilità delle funzioni definite a tratti.

6. (Teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone). *Sia $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona definita in un intervallo (α, β), dove α e β sono reali estesi. Allora esistono (nei reali estesi) i limiti per $x \to \alpha$ e per $x \to \beta$ di $f(x)$, e risulta*
   $$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \inf f \quad e \quad \lim_{x\to\beta} f(x) = \sup f$$
   se f è crescente e
   $$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \sup f \quad e \quad \lim_{x\to\beta} f(x) = \inf f$$
   se f è decrescente.

   Dimostrazione (**facoltativa**). Proviamo il risultato nel caso speciale di f crescente e $x \to \beta = +\infty$. Gli altri casi si provano in modo analogo (i dettagli sono lasciati agli studenti). Si hanno due possibilità: $\sup f < +\infty$ e $\sup f = +\infty$. Supponiamo prima che l'estremo superiore di $f(x)$ sia finito e denotiamolo, per brevità, con la lettera λ. Fissiamo un arbitrario $\epsilon > 0$. Occorre trovare una semiretta $(h, +\infty)$ in cui valga $\lambda - \epsilon < f(x) < \lambda + \epsilon$. Poiché (per definizione di estremo superiore) λ è il minimo maggiorante per $f(x)$, il numero $\lambda - \epsilon$ non può essere un maggiorante per $f(x)$. Non è vero quindi che tutti i numeri $f(x)$ verificano la condizione $f(x) \leq \lambda - \epsilon$. Ne esiste quindi (almeno) uno, denotiamolo $f(\bar{x})$, che non verifica tale condizione. Esiste cioè un $\bar{x}$ per il quale risulta $f(\bar{x}) > \lambda - \epsilon$. Dato che abbiamo supposto $f(x)$ crescente, se x è un qualunque numero maggiore di $\bar{x}$, si ha $f(\bar{x}) \leq f(x)$ e quindi, a maggior ragione, $\lambda - \epsilon < f(x)$. D'altra parte λ è un maggiorante per $f(x)$ e, di conseguenza, per ogni x (e non solo per quelli maggiori di $\bar{x}$) risulta $f(x) \leq \lambda$. In conclusione, possiamo affermare che per gli $x > h := \bar{x}$ si ha $\lambda - \epsilon < f(x) < \lambda + \epsilon$, e quindi, per la definizione di limite, $f(x) \to \lambda = \sup f$.
   Supponiamo ora $\sup f = +\infty$ e fissiamo un $k > 0$. Poiché (in base al significato della notazione $\sup f = +\infty$) la funzione non è limitata superiormente, il numero k non può essere maggiore o uguale di tutti gli $f(x)$. Esiste quindi un numero $\bar{x}$ per il quale risulta $f(\bar{x}) > k$ (ricordarsi del discorso sulle pecore, ma se non se ne vede il nesso, belare). Dato che la funzione è crescente, quando $x > h := \bar{x}$ si ha $f(x) > k$. Dunque, per la definizione di limite, $f(x) \to +\infty = \sup f$. $\square$

Esercizi 7.2.1. 1. *Calcolare* $\lim_{x\to+\infty} \ln((x^2+1)/(x^3+3))$.

Svolgimento. *Per le proprietà dei limiti delle funzioni razionali abbiamo*

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)/(x^3+3) = \lim_{x\to+\infty} 1/x = 0^+$$

applicando il teorema del cambiamento di variabile (posso farlo perché ln *è continua) si ottiene*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln((x^2+1)/(x^3+3)) = \lim_{y\to0^+} \ln(y) = -\infty$$

2. *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+\frac{x^2}{1+x}\right).$$

Svolgimento. *Cominciamo col mettere in evidenza (cioè raccogliere) i termini di*

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x}+\frac{x^2}{1+x}$$

che prevalgono quando $x\to-\infty$ (è una buona norma da seguire). Si ha

$$f(x) = \sqrt{x^2(1+2/x)}+\frac{x^2}{x(1/x+1)} =$$

$$|x|\sqrt{1+2/x}+\frac{x}{1+1/x} = |x|(1+2/x)^{1/2}+x(1+1/x)^{-1}.$$

Con le sostituzioni $t=2/x$ e $t=1/x$ nelle due uguaglianze

$$(1+t)^{1/2} = 1+t/2+\epsilon(t)t \quad e \quad (1+t)^{-1} = 1-t+\epsilon(t)t$$

si ha

$$f(x) = |x|\left(1+1/x+\frac{2\epsilon(2/x)}{x}\right)+x\left(1-1/x+\frac{\epsilon(1/x)}{x}\right).$$

Tenendo conto che si può supporre $|x|=-x$ (dato che $x\to-\infty$), risulta

$$f(x) = -x-1-2\epsilon(2/x)+x-1+\epsilon(1/x) = -2-2\epsilon(2/x)+\epsilon(1/x).$$

Quindi, applicando il teorema del passaggio al limite per funzioni continue, per $x\to-\infty$ si ottiene

$$f(x)\to-2-2\epsilon(0)+\epsilon(0) = -2.$$

3. *Usando i limiti notevoli, verificare che $\lim_{x\to+\infty} x^r/a^x = 0, \forall r>0$ e $a>1$.*

4. *Come applicazione del teorema (di esistenza) del limite per le funzioni monotone, dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$.*

Svolgimento. *Allo scopo ricordiamo che la funzione arcotangente è l'inversa della restrizione della tangente all'intervallo $(-\pi/2,\pi/2)$. Essendo la tangente, in tale intervallo, una funzione strettamente crescente, anche l'arcotangente risulta strettamente crescente. Di conseguenza, ricordandosi che l'immagine di una funzione inversa coincide col dominio della funzione che viene invertita, si ha*

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) = \sup\{\arctan(x)\colon x\in\mathbb{R}\} = \sup(-\pi/2,\pi/2) = \pi/2.$$

5. *Dal fatto che la funzione esponenziale (naturale) è l'inversa della funzione logaritmica (naturale), dedurre che*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

6. *Provare che la funzione definita da $f(x) = \ln(x) + 2x^3$ è invertibile, studiarne la funzione inversa f^{-1} e disegnarne il grafico. In particolare determinarne dominio, immagine, crescenza, concavità ed eventuali asintoti.*
Il $\lim_{x\to 2} f^{-1}(x)$ non è importante per lo studio di f^{-1}. Per quale motivo? Calcolarlo lo stesso, applicando un noto teorema.

7. *Sia $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$. Dedurre, dal teorema del confronto dei limiti, che se x_0 è un punto di accumulazione per A e se*
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \gamma \in \mathbb{R}^*,$$
allora $\gamma \geq 0$. Rispondere alla seguente domanda: se (ferme restando le altre ipotesi) si suppone $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in A$, si può affermare che $\gamma > 0$?

8. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Provare che se f è crescente, allora (necessariamente) risulta $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

   Suggerimento. *Fissato un $x_0 \in \mathbb{R}$, si osservi che il rapporto incrementale*
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
è sempre maggiore o uguale a zero. Quindi, per il teorema del confronto dei limiti ..., completare la dimostrazione.

9. *Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" del teorema dei carabinieri, nel caso $\gamma \in \mathbb{R}$.*
   Dimostrazione sbagliata. *Denotiamo con l il limite (per $x \to \alpha$) di $g(x)$. Occorre provare che $l = \gamma$. Poiché $f(x) \leq g(x)$ e $f(x) \to \gamma$, dal teorema del confronto dei limiti si deduce $\gamma \leq l$. Analogamente, tenendo conto che $g(x) \leq h(x)$ e che anche $h(x) \to \gamma$, si ha $l \leq \gamma$. Pertanto $l = \gamma$.*

10. *Provare che una funzione $f(x)$ tende a zero per $x \to \alpha$ se e solo se tende a zero $|f(x)|$.*

    Suggerimento. *Scrivere le definizioni di limite per entrambi i casi e confrontarle.*

11. *Provare il seguente* **Corollario** *(del teorema dei carabinieri).* Siano f e g due funzioni reali di variabile reale. Supponiamo che $f(x)$ sia limitata e che $g(x) \to 0$ per $x \to \alpha$. Allora (quando ha senso) $f(x)g(x) \to 0$ per $x \to \alpha$.

    Suggerimento.. *Supponiamo che il limite abbia senso, cioè che α sia un punto di accumulazione per il dominio $D_f \cap D_g$ della funzione prodotto $f(x)g(x)$. Dato che $f(x)$ è limitata, esiste una costante c tale che $|f(x)| \leq c$ per ogni $x \in D_f$. Pertanto (per ogni $x \in D_f \cap D_g$) risulta*
$$0 \leq |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq c|g(x)|.$$
La funzione $|f(x)g(x)|$ è dunque "incastrata" tra due carabinieri ..., completare la dimostrazione.

12. *Provare che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ e spiegare per quale motivo per ottenere tale risultato non si può applicare l'algebra dei limiti.*

13. *Provare che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) + 2\cos(3x)}{x^2 + x + \sqrt{x}} = 0$.*

7.2.2 Venerdì 27/11/09.

49-50. Lezioni tenute dal Dott. Bianchini.

Esercizi 7.2.2. *1. Verifica utilizzando la definizione i seguenti limiti:*

(a) $\lim_{x\to+\infty} 10x^3 - 30x^2 + 23x - 12 = +\infty$,

(b) $\lim_{x\to-\infty} 10x^3 - 30x^2 + 23x - 12 = -\infty$,

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x^2 - 6} = \frac{3}{5}$,

(d) $\lim_{x\to3} \frac{6 - x}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$,

(e) $\lim_{x\to3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

2. Calcola i seguenti limiti sfruttando lo sviluppo di Taylor delle funzioni interessate:

(a) $\lim_{x\to0} \frac{\log(\cos(\sin(x^3)))}{x^6}$,

(b) $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{3\sin(x)^2 + \sin(4x^2)}$,

(c) $\lim_{x\to3} \frac{\sin(x^2 - 5x + 6)}{1 - cos(x - 3)}$.

7.3 Settimana 30/11 - 5/12/09, cap. 4, Par. 4.4, 6.1, 6.2.

7.3.1 Venerdí 4/12/09

51-52. Lezioni tenute dal Dott. Bianchini.

Definizione 7.3.1. *Se $f(x)$ tende a zero per $x \to \alpha$, si dice che è* infinitesima per $x \to \alpha$ *o che è un* infinitesimo per $x \to \alpha$ *(quando risulta evidente dal contesto, la precisazione "per $x \to \alpha$" può venire omessa). In questo caso si scrive*

$$f(x) = o(1), \quad x \to \alpha.$$

Si ricorda che se f è infinitesima in $x_0 \in \mathbb{R}$ allora è anche infinitesima per $x \to x_0$ e che se f è infinitesima per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, allora è estendibile per continuità a x_0 e la funzione estesa è infinitesima in x_0. In simboli si può affermare che

$$f(x) = \epsilon(x - x_0) \iff f(x) = o(1), \quad x \to x_0.$$

Definizione 7.3.2. *Se $f(x)$ tende a $\pm\infty$ per $x \to \alpha$, si dice che è un* infinito per $x \to \alpha$ *(quando risulta evidente dal contesto, la precisazione "per $x \to \alpha$" può venire omessa).*

Esempi ed esercizi.

1. Il corollario nell' Esercizio 7.2.1 n.11 può essere enunciato anche così: *il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è una funzione infinitesima.*

2. La funzione definita da $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ è infinitesima per $x \to 0$. Infatti $x^2 \to 0$ per $x \to 0$ e $\sin(1/x)$ è una funzione limitata. Si osservi che il teorema fondamentale per il calcolo dei limiti non è applicabile in questo caso perché $\sin(1/x)$ non ammette limite per $x \to 0$.

3. La funzione definita da $f(x) = 1/(x - x_0)$ è infinita per $x \to x_0^{\pm}$.
4. La funzione definita da $f(x) = x$ è infinita per $x \to \pm\infty$.

Definizione (di infinitesimo di ordine inferiore, superiore, dello stesso ordine e di infinitesimo equivalente o asintotico, per $x \to \alpha$), vedi testo.

Esempio Se $f(x) = (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$ allora f è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$. In simboli:

$$f(x) = (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0) \Longrightarrow f(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Inoltre se $f(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, allora è estendibile per continuità a x_0 e la funzione estesa è del tipo $(x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$.

Lemma 7.3.1. *Siano f, $\tilde{f}$ e g, $\tilde{g}$ due coppie di infinitesimi equivalenti per $x \to \alpha$, allora*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)},$$

dove la precedente uguaglianza significa anche che i due limiti o esistono entrambi o nessuno dei due esiste.

Dimostrazione. Basta osservare che, per $x \neq \alpha$, $f(x) = \tilde{f}(x)\,\dfrac{f(x)}{\tilde{f}(x)}$ e ..., completare la dimostrazione per esercizio.

Definizione (di infinito di ordine inferiore, superiore, dello stesso ordine e di infinito equivalente o asintotico), vedi testo.

Esercizio da fare. Formulare e dimostrare il lemma di sostituzione degli infiniti, analogo a quello per gli infinitesimi.

Definizione 7.3.3 (di infinitesimi di riferimento, per $x \to \alpha$)**.** *Le seguenti funzioni infinitesime φ si dicono di riferimento*

$$\varphi(x) = \pm(x - x_0), \quad x \to x_0^{\pm}$$
$$\varphi(x) = \pm 1/x, \quad x \to \pm\infty$$

Si osservi come gli infinitesimi di riferimento siano definitivamente positivi. Questa richiesta è giustificata dalla seguente definizione.

Definizione 7.3.4 (di infinitesimi di ordine $r > 0$, per $x \to \alpha$)**.** *Una funzione f si dice infinitesima di ordine $r > 0$ per $x \to \alpha$ se esiste $l \neq 0$ in $\mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(\varphi(x))^r} = l$$

Definizione 7.3.5 (di infiniti di riferimento, per $x \to \alpha$)**.** *Le seguenti funzioni infinite φ si dicono di riferimento*

$$\varphi(x) = \pm 1/(x - x_0), \quad x \to x_0^{\pm}$$
$$\varphi(x) = \pm x, \quad x \to \pm\infty$$

Anche gli infiniti di riferimento sono definitivamente positivi e, in maniera analoga a quanto fatto sopra, si definiscono gli infiniti di ordine $r > 0$, per $x \to \alpha$.

Esercizio da fare. Dare la definizione per esercizio e poi consultare il testo.

Esempi

1. Formulare i limiti notevoli in termini di infiniti (o infinitesimi) di ordine superiore e inferiore e dedurne che alcune funzioni (quali?) non hanno ordine.

2. Per $x \mapsto +\infty$: $3x^4 + 4x^3$ è un infinito di ordine 4, $\sin(3/x)$ è un infinitesimo di ordine 1, $\sqrt{3x+4}$ è un infinito di ordine 1/2, $\exp(x)$ e $\ln(x)$ sono infiniti che non hanno ordine.

3. Per $x \mapsto 0$: $\ln(x)$ è un infinito che non ha ordine, $\cos(x) - 1$ è un infinitesimo di ordine 2, $\sqrt[3]{3x}$ è un infinitesimo di ordine 3/2.

Definizione di parte principale, per $x \to \alpha$. Sia α di accumulazione per il dominio della funzione f, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$ e sia φ l'infinitesimo di riferimento per $x \to \alpha$. Si dice che $\ell\,\varphi(x)^r$, $r \in \mathbb{R}$, e' la parte principale di f per $x \to \alpha$ se $f(x) \sim \ell\,\varphi(x)^r$, per $x \to \alpha$.

Osservazioni.

- La parte principale può non esistere.
- Se $r > 0$, f è infinitesima, se $r < 0$, f è infinita.
- Se una funzione ha parte principale non costante, ha anche ordine (come infinitesimo o infinito). Viceversa se una funzione ha ordine (come infinitesimo o infinito), allora ha anche parte principale.
- Se $f \in C^\infty$ in un intorno di x_0 ed ha parte principale per $x \to x_0$, allora la sua parte principale e' il primo termine non nullo di ogni polinomio (non nullo) di Taylor centrato in x_0. Si noti che $\exp(-1/x^2)$ (estesa per continuità a 0) e' una funzione C^∞ che ha tutte le derivate in 0 uguali a 0 e quindi non ha parte principale per $x \to 0$. Si dimostri per **esercizio** la precedente affermazione.
  Suggerimento. Notare che ogni derivata di f è il prodotto di f per una funzione razionale e poi usare il cambiamento di variabile $y = -1/x^2$.
- Se f è continua in x_0, $(f(x) - f(x_0))$ e' infinitesima in x_0, la sua parte principale, quando esiste, esprime la maniera di andare a 0 dell'incremento, determina l'andamento del grafico vicino a x_0 e quindi indica se ci sono massimi o minimi locali e flessi a tangente orizzontale. Per **esercizio**, riformulare in termini di parte principale il Teorema 6.1.3 sulla derivata n-sima nei punti estremanti.

Esercizio da fare. Consultare sul testo *l'algebra degli "o piccolo"* e confrontarla con le regole di calcolo per le funzioni di tipo $\epsilon(x)$ nel Lemma 5.1.1.

Definizione 7.3.6 (di asintoto obliquo)**.** *La retta $y = mx+q$ (con $m \neq 0$) si dice asintoto obliquo destro per il grafico della funzione f (o anche per f) se*

$$f(x) = mx + q + o(1) \quad x \to +\infty \quad \iff \quad f(x) \sim mx + q \quad x \to +\infty$$

Analoga definizione vale per gli asintoti obliqui sinistri.

Esercizi 7.3.1. *1. Fare gli esercizi sui confronti asintotici nella sezione 2.5.2 del file degli esercizi.*

2. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = (1 + 1/x)^x$, (inclusi gli andamenti asintotici all'infinito).

3. Studiare la funzione $f(x) = \log(|x|+e^x)$ (inclusi gli andamenti asintotici all'infinito).

4. Studiare (utilizzando il polinomio di Taylor) i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{\log(\cos(x))}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2 - (\sin(x))^2 + 1)}{e^{x^2} - 1 - x^2}.$$

5. *Studiare il limite*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - e^x + \frac{1}{2}x}{x^2\cos(x) + x^3}.$$

6. *Studiare (qualitativamente) la funzione*
$$f(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{3x+2}.$$

7. *Fare gli esercizi dei Capitoli 1 e 2 del file degli esercizi.*

8. *Usando la Definizione 7.3.6, verificare che $y = mx + q$ è un asintoto obliquo destro per f se e solo se*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = 0.$$
Determinare analoghe condizioni per gli asintoti obliqui sinistri.

9. *Determinare eventuali asintoti obliqui per le funzioni fin qui studiate.*

10. *Dominio e grafico delle funzioni*
$$f(x) = \sin(\arcsin(x)) \qquad f(x) = \arcsin(\sin(x))$$
$$f(x) = \tan(\arctan(x)) \qquad f(x) = \arctan(\tan(x)).$$

11. *Studiare la cubica e le sue radici*

12. *Data la funzione definita da $f(x) = \dfrac{(x-8)^2 - 1}{(x+4)^2}$, usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e il segno della funzione. Dedurne anche l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.*

13. *Studiare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione*
$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 2hx^2 + 3$$

Capitolo 8

Primitive di una funzione reale di variabile reale

In questo capitolo affronteremo il problema della ricerca delle primitive di una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo. Nel testo di riferimento (e in molti testi) le primitive, chiamate anche *integrale indefinito*, sono affrontate nel capitolo sull'integrazione. Qui, anche per ragioni di organizzazione dei tempi del corso, si preferisce anticipare l'argomento come un capitolo del calcolo differenziale e legarlo concettualmente alle equazioni differenziali.

Riprenderemo l'argomento nel capitolo sull'integrazione secondo Riemann nel quale forniremo una condizione sufficiente all'esistenza di primitive (teorema fondamentale del calcolo) e useremo la nozione di primitiva per il calcolo degli integrali di Riemann.

Riteniamo comunque che sia importante che lo studente capisca bene la differenza concettuale fra integrale di Riemann e primitiva di una funzione.

8.1 Settimana 7-12/12/09. Par. 9.4.1, 9.6.1

8.1.1 Mercoledí 9/12/09

53-55. Definizione (di primitiva di una funzione su un intervallo, vedi anche definizione 9.5 pg. 235 del testo). Una funzione g si dice *primitiva o funzione primitiva* della funzione f sull'intervallo I, se g è derivabile su I e $g'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$.

Esercizi 8.1.1.

- *La funzione* cosh *è una primitiva della funzione* sinh *su* $\mathbb{R}$.
- *La funzione sgn non ha primitive su* $\mathbb{R}$.
- *La funzione* ln *è una primitiva della funzione* $x \mapsto 1/x$ *su* $\mathbb{R}^+$.
- *La funzione* $x \mapsto \ln(-x)$ *è una primitiva della funzione* $x \mapsto 1/x$ *su* $\mathbb{R}^-$.
- **Non si può dire** *che la funzione* f *definita da* $x \mapsto \ln(|x|)$ *è una primitiva della funzione* $g : x \mapsto 1/x$ *su* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *anche se* $f' = g$ *sul loro comune dominio, perché* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *non è un intervallo.*
- *Data la funzione* $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ *si prova che:*
  $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$,
  f *è estendibile per continuità a* $x_0 = 0$,
  la funzione estesa è derivabile su $\mathbb{R}$ *e*

$$f' : x \mapsto \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

quindi f estesa non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e f estesa è una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione f' sopra definita.

- *Vale il seguente risultato:* una funzione f definita su un intervallo I con una discontinuità di salto in $x_0 \in I$, non ammette primitive in I.

  Dimostrazione. *Supponiamo per assurdo che esista una primitiva F. F è continua e derivabile in I, quindi posso applicare il teorema sul limite della derivata (vedi il punto 5 dei risultati fondamentali sui limiti o il Teorema 8.12 del testo) ed ottengo*

  $$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = D^{\pm}F(x_0)\,,$$

  quindi .... completare la dimostrazione per esercizio.

Lemma 8.1.1 (Struttura dell'insieme delle primitive)**.** *Sia f una funzione definita su un intervallo I e sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle sue primitive su I. Se $\mathcal{P}$ è non vuoto e $F \in \mathcal{P}$ allora*

$$\mathcal{P} = \{G_C : I \to \mathbb{R} : G_C(x) = F(x) + C\,,\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrazione. $G_C : x \mapsto F(x) + C$ è una primitiva di f su I: ovvio (dimostrarlo formalmente usando la definizione). Sia G una primitiva di f su I. La funzione $H = G-F : I \to \mathbb{R}$ è una funzione con derivata nulla su I, pertanto (come conseguenza del teorema di Lagrange) è costante. Se chiamiamo C tale costante otteniamo $G(x) = F(X) + C$. $\square$

Definizione 8.1.1. *Sia f una funzione reale di variabile reale e sia I un intervallo su cui sono definite primitive di f. I si dice* intervallo massimale *(su cui sono definite primitive di f), se non esiste un intervallo J che contiene propriamente I su cui esistono primitive di f.*

Ad esempio gli intervalli massimali su cui sono definite primitive di $f(x) = 1/x$ sono $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

La ricerca di una primitiva su un intervallo è l'esempio più semplice di *equazione differenziale*

$$y'(x) = f(x) \quad \text{su} \quad I,$$

cioè la ricerca di una funzione con assegnata derivata. L'incognita è una funzione (indicata con y) e l'equazione coinvolge la funzione incognita e le sue derivate (in questo caso appare esplicitamente solo la derivata prima della funzione). Il Lemma 8.1.1 dimostra che se la soluzione esiste non è unica, per sceglierne una bisogna assegnare la *condizione iniziale*, cioè il valore della funzione in un punto x_0, detto iniziale.

Esempio. Equazione differenziale legata al problema della caduta dei gravi lungo la verticale: in un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente e piano terra coincidente col piano $z = 0$, se si lascia cadere un punto materiale da un'altezza z_0, si ottiene l'equazione differenziale con condizioni iniziali

$$z''(t) = -g \text{ (accelerazione di gravità)}, \quad z'(0) = 0, \quad z(0) = z_0.$$

Si ottiene per il moto del grave

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_0.$$

Dopo quanto tempo e a quale velocità il grave tocca terra?

Introduciamo una notazione comoda nei conti per la ricerca delle primitive:

$$\int f(x)\,dx \quad \text{oppure se non ci sono dubbi sulla variabile} \quad \int f(x)\,,$$

dove f è una funzione reale di variabile reale. Tale notazione viene detta *integrale indefinito della funzione f*. Classicamente per integrale indefinito si intendeva l'insieme delle primitive di f, adesso molti autori indicano con il precedente simbolo una qualsiasi primitiva. Noi diamo la seguente definizione.

Definizione 8.1.2 (di integrale indefinito)**.** *Il simbolo $\int f(x)\,dx$ indica una funzione g con la proprietà $g' = f$ su almeno un intervallo. In altre parole ciò che è indefinito è l'intervallo su cui g è una primitiva di f.*

Esempi.

1. $\int 1/x = \ln(|x|)$, ma $\ln(x)$ è una primitiva di $1/x$ su $(0, +\infty)$, mentre $\ln(-x)$ è una primitiva di $1/x$ su $(-\infty, 0)$.
2. Primitive dei monomi.

Esercizi 8.1.2. *1.* **Interpretare la tabella delle derivate delle funzioni "elementari" come esistenza di primitive di funzioni. Ricordarsi di specificare l'intervallo.**

2. Provare la "linearità" dell'integrale indefinito ed applicarla alla ricerca delle primitive dei polinomi.

Integrale indefinito delle funzioni razionali $f(x) := \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:

- Riduzione al caso $n < m$: per la divisione con resto fra polinomi, se $n \geq m$ possiamo scrivere
$$P_n(x) = Q_m(x)P_{n-m}(x) + R_s(x)$$
dove $P_{n-m}(x)$ è un polinomio di grado $n - m$ e $R_s(x)$ è un polinomio di grado $s < m$. Quindi otteniamo
$$\int f(x) = \int P_{n-m}(x) + \int \frac{R_s(x)}{Q_m(x)}$$
- Caso $m = 1$. $f(x) = \dfrac{A}{x - x_0}$,
$$\int f(x) = A\ln(|x - x_0|)$$
- Caso $m = 2$. $f(x) = \dfrac{Ax + D}{x^2 + bx + c}$. In questo caso le tecniche sono diverse in dipendenza del segno del discriminante del denominatore Δ.
- Caso $\Delta > 0$. Dette x_1, x_2 le due radici distinte, si ricercano M, $N \in \mathbb{R}$ tali che
$$f(x) = \frac{M}{x - x_1} + \frac{N}{x - x_2}.$$
Dobbiamo quindi imporre che
$$Ax + D \equiv M(x - x_2) + N(x - x_1),$$
cioè risolvere il sistema lineare di due equazioni in due incognite
$$\begin{cases} (x_1 - x_2)M &= Ax_1 + D \\ (x_2 - x_1)N &= Ax_2 + D \end{cases}$$

- Caso $\Delta = 0$. Detta x_1 la radice doppia, si ricercano M, $N \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \frac{M}{x - x_1} + \frac{N}{(x - x_1)^2}.$$

Dobbiamo quindi imporre che

$$Ax + D \equiv M(x - x_1) + N,$$

la precedente identità e la sua derivata portano a

$$\begin{cases} N & = Ax_1 + D \\ M & = A \end{cases}$$

8.1.2 Venerdí 11/12/09

Lezione non tenuta per sciopero

8.2 Settimana 14-19/12/09. Par. 9.5, 9.6.2

8.2.1 Mercoledì 16/12/08

56-58 Integrale indefinito delle funzioni razionali $f(x) := \frac{Ax+D}{x^2+bx+c}dx$:

- Caso $\Delta < 0$. In questo caso il denominatore è strettamente positivo. Abbiamo

$$\int \frac{Ax + D}{x^2 + bx + c}dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + b - b}{x^2 + bx + c}dx + \int \frac{D}{x^2 + bx + c}dx = \frac{A}{2} \ln(x^2+bx+c) + \int \frac{D - Ab/2}{x^2 + bx + c}dx.$$

Resta da studiare solo il caso

$$f(x) = \frac{E}{(x + x_0)^2 + \omega^2}$$

con $x_0 = b/2, \ \omega^2 = -\Delta/4$

Esempio

$$\int \frac{1}{1 + x^2} = \arctan(x).$$

Il caso generale si riporta al precedente col “metodo di sostituzione” come verrà spiegato, comunque è facile vedere che

$$\int \frac{E}{(x + x_0)^2 + \omega^2} = \frac{E}{\omega^2} \int \frac{1}{((x + x_0)/\omega)^2 + 1} = \frac{E}{\omega} \arctan\left(\frac{x + x_0}{\omega}\right)$$

Differenziale di una funzione: torneremo su questo concetto nella seconda parte del corso, per adesso il differenziale sarà semplicemente una comoda notazione per facilitare i calcoli delle tecniche di integrazione.

$$dg(x) := g'(x)dx.$$

In tal modo la ricerca dell'integrale indefinito equivale alla ricerca di una funzione di cui è dato il differenziale

$$\int f(x)dx := g(x) \quad \text{tale che} \quad dg(x) = f(x)dx$$

Integrazione per parti. L'integrazione per parti è una diretta conseguenza della formula di derivazione del prodotto e può essere ricondotta alle seguenti uguaglianze

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Esempi

1. $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$
2. $\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int x/(1+x^2)\,dx = x\arctan(x) - \ln(1+x^2)/2 = x\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$

Integrazione per sostituzione (senza dimostrazione). L'integrazione per sostituzione può essere considerata come un cambiamento di variabile nell'integrale ed è una diretta conseguenza della formula di derivazione della funzione composta. Posto $x = \varphi(t)$ otteniamo $dx = \varphi'(t)dt$ e

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Molto spesso è utile usare la sostituzione inversa $t = \psi(x)$, ottenendo $dt = \psi(x)dx$ e semplificando i calcoli.

Esercizi 8.2.1. *1. In $\int \cos(3x+\pi)dx$, posto $t = 3x+\pi$, otteniamo $dt = 3dx$ e quindi*

$$\int \cos(3x+\pi)dx = \int \cos(t)/3\,dt = \sin(t)/3 = \sin(3x+\pi)/3$$

2. In $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$, posto $t = \ln(x)$, otteniamo $dt = dx/x$ e quindi

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx = \int \cos(t)\,dt = \sin(t) = \sin(\ln(x))$$

3. In $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, posto $x = \sin(t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, otteniamo $dx = \cos(t)dt$ e quindi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(t)^2 dt = \int \cos(t) d\sin(t) = \cos(t)\sin(t) + \int (1-\cos(t)^2)dt.$$

Da cui otteniamo $2\int \cos(t)^2 dt = \cos(t)\sin(t) + t$ e quindi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\cos(t)\sin(t)+t) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

4. Calcolare $\int \sin(\ln(x))\,dx$.

Suggerimento. *Prima applicare la sostituzione $t = \ln(x)$ e poi due volte l'integrazione per parti, in maniera analoga a quanto fatto nel precedente esercizio.*

5. Applicare la sostituzione $x = (a/b)\sin(t)$ a $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}dx$

6. Applicare la sostituzione $x = (a/b)\sinh(t)$ a $\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}dx$

7. Integrale indefinito delle funzioni razionali: studiamo $\int \frac{E}{(x+x_0)^2+\omega^2}dx$ con la sostituzione $t = (x+x_0)/\omega$

$$\int \frac{E}{(x+x_0)^2+\omega^2}dx = \int \frac{E}{\omega^2 t^2 + \omega^2}\,\omega dt = \frac{E}{\omega}\arctan(t) =$$
$$= \frac{E}{\omega}\arctan((x+x_0)/\omega) = \frac{2E}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2x+b}{-\Delta})\right)$$

8. *Calcolare l'insieme delle primitive delle seguenti funzioni, specificando l'intervallo*

$$x\cos(x), \quad xe^x, \quad \cos(3x), \quad x\sqrt{1-x^2}, \quad x\sqrt{1+x^2}$$

9. *Calcolare l'insieme delle primitive delle seguenti funzioni, specificando l'intervallo (o gli intervalli) su cui sono definite. Si consiglia di calcolare prima l'integrale indefinito e poi dedurne i possibili insiemi di primitive.*

$$f(x) = \frac{x^3+7x-4}{2x+5}, \quad \frac{x^3+7x-4}{2x^2+x+5}, \quad \frac{x^3+7x-4}{2x^2+12x+18}, \quad \frac{x^3+7x-4}{x^2+5x+6}$$

10. *Svolgere gli esercizi 9.1, 9.2, 9.6 a),b),c) del testo.*

11. *Svolgere gli esempi 9.12 e 9.16 del testo come fossero esercizi.*

8.2.2 Venerdí 18/12/09

59-62. Esercizi di ricapitolazione.