–

– Prova scritta del settimo appello 08/09 12 cfu – 11 / 2 / 2010

– Compito n. **1**

Domanda 1)

Sia f la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{x^3} & x \leq -2 \\ \arctan(x+2) & x > -2 \end{cases}$.

1. Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali, verticali.
2. Usare le proprietà delle funzioni continue ed il punto precedente per determinare il segno della funzione.
3. Disegnare il grafico della funzione.
4. Determinare numero e segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.
5. Calcolare l'area della parte di piano compresa dal grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = 1$ e $x = -7$.
6. Rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione F definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-7}^{x} f(t)dt$.
   (a) Determinare il dominio di F.
   (b) Determinare eventuali asintoti verticali ed orizzontali di F
   (c) Senza calcolare l'integrale, determinare crescenza e decrescenza e disegnare il grafico di F
   (d) Calcolare $F(x)$ per ogni x nel dominio di F.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da

$$f(x) = x^4 \cos(3x^3 - 4).$$

1. Determinare, se esiste, al variare di $n \in N$,
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{f(x)}$$
2. La funzione ha ordine per $x \to 0$? Se si, determinarlo.
3. Stabilire qual è la prima derivata non nulla in $x_0 = 0$ di f e determinarne il valore. Stabilire se la funzione ha in $x_0 = 0$ un massimo o un minimo locale.
4. Determinare il polinomio di McLaurin di ordine 22 di f, usando il simbolo di sommatoria. Si consiglia di usare le formule di addizione per il coseno e quindi l'approssimazione di McLaurin di seno e coseno.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

1. Dato il numero complesso w, spiegare il procedimento per calcolare le soluzioni complesse dell'equazione $z^n = w$, con n numero naturale.
2. Sia $w = -2 + 2\,i$:
   disegnare w nel piano complesso e calcolarne modulo, parte reale, coefficiente dell'immaginario, argomenti;
   calcolare e disegnare le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = w$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Verificare che la funzione $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non ha un'inversa C^∞. Suggerimento: calcolare lo Jacobiano della funzione in oggetto.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)

Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da $f(x, y) = 2x^2y + 2y^3e^x$.

1. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $Q \equiv (0, -2, f(0, -2))$.
2. Determinare l'equazione della retta tangente in $P \equiv (0, -2)$ alla curva di livello $f(x, y) = f(P)$.
3. Determinare la derivata di f in $P_1 \equiv (1, 2)$ in direzione del versore $\bar{v} = (1/\sqrt{2}\,,\, 2/\sqrt{2})$.
4. Quale è l'approssimazione di McLaurin di ordine due di f? Si può dedurre da essa se l'origine è un punto di estremo relativo per f? Si può dedurre con altre considerazioni se l'origine è un punto di estremo relativo per f?
5. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f sull'insieme D definito da
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2,\ |y| \leq 2\}$$
   Determinare massimo e minimo di $f_{|D}$ e disegnare D e i punti di massimo e minimo.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)

Assegnato $\epsilon \in \mathbb{R}$, rispondere alle seguenti domande sull'equazione differenziale $y'' - \epsilon y' + y = \sin(x)$.

1. Determinare al variare di $\epsilon \in [0, 2]$, le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare al variare di $\epsilon \in (0, 2)$, le soluzioni dell'equazione.
3. Determinare al variare di $\epsilon \in [0, 2]$, le soluzioni dell'equazione.
4. Determinare al variare di $\epsilon \in (0, 2)$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
5. Determinare al variare di $\epsilon \in [0, 2]$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
6. Determinare per $\epsilon = 0$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
7. Determinare per $\epsilon = 1$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
8. Determinare per $\epsilon = 2$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
9. Determinare per $\epsilon = 4$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.