–

Analisi Matematica I [B044] – Prova scritta del sesto appello 12 cfu 09/10 – 12 / 1 / 2010

– Compito n. **1**

Domanda 1)

Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x\sin(2x) & x \in [-(\pi+1)/2\,,\,(\pi+1)/2\,] \\ \frac{2}{x} & x \notin [-(\pi+1)/2\,,\,(\pi+1)/2\,] \end{cases}$

1. Per quali $x \in \mathbb{R}$, f è continua? Per quali è derivabile?
2. Determinare eventuali asintoti di f
3. Usare il teorema degli zeri per determinare il segno di f
4. Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = x$?
5. Disegnare un grafico approssimativo di f usando i grafici delle funzioni elementari e le proprietà delle funzioni continue; in particolare non calcolare i punti di estremo locale e la convessità della funzione.
6. Determinare dominio, eventuali asintoti verticali e orizzontali, eventuali punti di discontinuità, punti angolosi e cuspidi della funzione definita da
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
7. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione F definita nel precedente punto.
8. Calcolare $F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ dove F è definita al punto 6.
9. Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico $y = f(x)$, l'asse delle x e le rette $x = 0$ e $x = (\pi + 1)/2$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da

$$f(x) = -2x^{20}e^{(x^2)}.$$

1. Determinare l'approssimazione di McLaurin di ordine 30 di f, usando il simbolo di sommatoria.
2. Determinare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione f
3. La funzione ha ordine per $x \to 0$? Se si, determinarlo.
4. Stabilire qual è la prima derivata non nulla in $x_0 = 0$ di f e determinarne il valore
5. Stabilire se la funzione ha in $x_0 = 0$ un massimo o un minimo locale.
6. Determinare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{f(x)}$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Verificare che la funzione $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non ha un'inversa C^∞. Suggerimento: calcolare lo Jacobiano della funzione in oggetto.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da $f(x, y) = 3x^2y + 3y^3e^x$.

1. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $Q \equiv (0, -3, f(0, -3))$.
2. Determinare l'equazione della retta tangente in $P \equiv (0, -3)$ alla curva di livello $f(x, y) = f(P)$.
3. Determinare la derivata di f in $P_1 \equiv (1, 2)$ in direzione del versore $\bar{v} = (1/\sqrt{2}\,,\,2/\sqrt{2})$.

4. Quale è l'approssimazione di McLaurin di ordine due di f? Si può dedurre da essa se l'origine è un punto di estremo relativo per f? Si può dedurre con altre considerazioni se l'origine è un punto di estremo relativo per f?
5. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f sull'insieme D definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 3,\ |y| \leq 3\}$$

Determinare massimo e minimo di $f_{|D}$ e disegnare D e i punti di massimo e minimo.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)

Assegnato $\epsilon \in \mathbb{R}$, rispondere alle seguenti domande sull'equazione differenziale $y'' - \epsilon y' + y = \sin(x)$.

1. Determinare al variare di $\epsilon \in [0, 2]$, le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare al variare di $\epsilon \in (0, 2)$, le soluzioni dell'equazione.
3. Determinare al variare di $\epsilon \in [0, 2]$, le soluzioni dell'equazione.
4. Determinare al variare di $\epsilon \in (0, 2)$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
5. Determinare al variare di $\epsilon \in [0, 2]$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
6. Determinare per $\epsilon = 0$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
7. Determinare per $\epsilon = 1$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
8. Determinare per $\epsilon = 2$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
9. Determinare per $\epsilon = 4$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)

1. Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |3 - x| \leq 1\,,\ |3 + y| \leq 2\}$$

e disegnarlo.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 9y^2 + 1}$. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.
3. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D.
4. Usare le proprietà delle funzioni continue su $\mathbb{R}^2$ per determinare l'immagine di D mediante f.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.