–

Analisi Matematica I [B044] – Prova scritta Analisi I 12cfu del quinto appello – 22 / 12 / 2009

– Compito n. **1**

Domanda 1)

Sia f la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{(x+1)^3}$.

1. Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali, verticali.
2. Usare le proprietà delle funzioni continue ed il punto precedente per determinare il segno della funzione.
3. Disegnare il grafico della funzione.
4. Determinare numero e segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.
5. Calcolare l'area della parte di piano compresa dal grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = 4$ e $x = 6$. Per determinare la primitiva di f usare la sostituzione $t = x + 1$.
6. Rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione F definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)dt$.
   (a) Determinare il dominio di F.
   (b) Determinare eventuali asintoti verticali ed orizzontali di F
   (c) Senza calcolare l'integrale, determinare crescenza e decrescenza e disegnare il grafico di F
   (d) Calcolare $F(x)$ per ogni x nel dominio di F. Per determinare la primitiva di f usare la sostituzione $t = x + 1$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

1. Scrivere l'approssimazione di McLaurin di ordine 3 delle funzioni:
   $(1+x)^{1/3}$, $\dfrac{1}{(1+x)^{1/3}}$
2. Scrivere l'approssimazione di McLaurin di ordine n delle funzioni:
   $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$
   $\cosh(x)$, $\dfrac{1}{(1+x)}$, $\dfrac{1}{(1-x)}$
3. Usando le proprietà dei polinomi di McLaurin, calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$x \mapsto f(x) = x^{10}\left(\cos\left(\frac{1}{1-x^3} - 1\right) - 1\right).$$
4. Usando il precedente punto calcolare, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali,
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

Sia $\gamma : t \mapsto (5t^2 , e^t)$ e $f : (x, y) \mapsto \ln(xy + 3y^2)$.

1. Determinare il dominio di γ, f, $\gamma \circ f$ e $f \circ \gamma$ e disegnarli.
2. Enunciare la regola della derivazione composta ed applicarla al calcolo di $D(\gamma \circ f)(-1, -2)$ e $D(f \circ \gamma)(1)$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

1. Determinare l'insieme
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 3, |x - y| \le 7\}$$
   e disegnarlo.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x.$$
   Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.

3. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)
Data l'equazione differenziale $y'' + \frac{9}{x} y' + \frac{7}{x^2} y = 0$ sulla semiretta $(0, +\infty)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. Determinare per quali valori di $q \in \mathbb{R}$ la funzione $y = x^q$ è soluzione dell'equazione differenziale.
2. Usando i risultati del punto precedente, determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione il cui grafico passa per il punto $P \equiv (1, 9)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = 9 + 4(x - 1)$
4. Determinare, se esiste, la soluzione dell'equazione il cui grafico passa per i punti $P \equiv (1, 9)$ e $Q \equiv (2, 4)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)
Sia f la funzione definita da $f(x, y) = e^{2y} + 4e^{xy} + 8x^2$. Determinare l'approssimazione di Taylor del secondo ordine centrata nell'origine di f e dedurne se l'origine è un punto di estremo locale per la funzione. Dedurre inoltre la retta tangente nell'origine alla linea di livello $f(x, y) = f(0, 0)$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.