–

– Prova scritta del terzo appello, A.A. 2009/10 – 20 / 7 / 2010

– Compito n. **1**

Domanda 1)

Determinare dominio, insieme di continuità e insieme di derivabilità della funzione definita da $f(x) = \arctan(\frac{10}{x^7})$ e calcolarne la derivata. La funzione è estendibile per continuità a zero? La funzione estesa (qualora esista) è derivabile in zero?

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-3x} & x > 0 \\ -3x & x \leq 0 \end{cases}$

1. Per quali $x \in \mathbb{R}$, f è continua? Per quali è derivabile?
2. Determinare eventuali asintoti di f
3. Usare il teorema degli zeri per determinare il segno di f
4. Disegnare il grafico di f.
5. Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e le rette verticali $x = -3$ e $x = 3$.
6. Determinare dominio, eventuali asintoti verticali e orizzontali, eventuali punti di discontinuità, punti angolosi e cuspidi della funzione definita da $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
7. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione F.
8. Calcolare $F(x)$ per ogni x nel dominio di F.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo per una funzione $f \in C^5((-4, 5))$
2. Spiegare la relazione fra integrale di Riemann e area, illustrandola con un disegno.
3. Spiegare la relazione fra integrale di Riemann orientato e area, illustrandola con un disegno.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da $f(x) = -4x^{19}e^{(x^4)}$.

1. Determinare l'approssimazione di McLaurin di ordine 37 di f, usando il simbolo di sommatoria.
2. Determinare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione f
3. La funzione ha ordine per $x \to 0$? Se si, determinarlo.
4. Stabilire qual è la prima derivata non nulla in $x_0 = 0$ di f e determinarne il valore
5. Stabilire se la funzione ha in $x_0 = 0$ un massimo o un minimo locale.
6. Determinare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{f(x)}$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)

Rispondere alle seguenti domande sull'equazione differenziale lineare del secondo ordine: $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x$

1. Verificare che le funzioni definite da $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^2 \ln(x)$ sono soluzioni, sulla semiretta $I = (0, +\infty)$, dell'equazione omogenea associata.

2. Determinare la soluzione generale, su I, dell'equazione omogenea associata.
3. Usando il metodo di variazione delle costanti, determinare la soluzione generale, su I, dell'equazione non omogenea.
4. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente in $P \equiv (1,4)$ alla retta $y = 4$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale in P.
5. Determinare, se esiste, la soluzione dell'equazione il cui grafico passa per i punti $P \equiv (1,4)$ e $Q \equiv (3,4)$. Posso affermare che tale soluzione ha un punto in cui si annulla la derivata?

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)
Data l'equazione differenziale $y'' + 16y = 8\cos(2x)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. L'equazione ha soluzioni limitate, illimitate, periodiche?
2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico che passa per il punto $P \equiv (0,-5)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = -5 + 2x$
4. Studiare al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione il cui grafico passa per l'origine e per il punto $P \equiv (a,b)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 7)
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ la cui derivata si annulla solo in $x_0 = 12$. Definiamo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$F(x,y) = f(4x + 5y) - f(4x - 5y)$$

1. Determinare il gradiente e la matrice Hessiana di F mediante le derivate di f.
2. Discutere l'esistenza di punti di massimo e minimo locale per F.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 8)
Sia $\gamma : t \mapsto (5t^2\,,\, e^t)$ e $f : (x,y) \mapsto \ln(xy + 3y^2)$.

1. Determinare il dominio di γ, f, $\gamma \circ f$ e $f \circ \gamma$ e disegnarli.
2. Enunciare la regola della derivazione composta ed applicarla al calcolo di $D(\gamma \circ f)(-1,-2)$ e $D(f \circ \gamma)(1)$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 9)
Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare il dominio della funzione definita da: $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1}\right)^{xy}$ e disegnarlo.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 10)
Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare il dominio della funzione definita da: $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2x - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - x}}$ e disegnarlo.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 11)
Determinare massimi e minimi relativi della funzione definita da: $f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + (x^2 - 1)y^2$
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.