

Domanda 1)

1. Enunciare la formula fondamentale del calcolo sulla relazione fra integrale di Riemann e primitive
2. Dimostrare il precedente risultato.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(5x) & x \in [-(\pi + 1)/5, (\pi + 1)/5] \\ \frac{5}{x} & x \notin [-(\pi + 1)/5, (\pi + 1)/5] \end{cases}$$

1. Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico $y = f(x)$, l'asse delle x e le rette $x = 0$ e $x = (\pi + 1)/5$
2. Rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Determinare dominio, eventuali asintoti verticali e orizzontali, eventuali punti di discontinuità, punti angolosi e cuspidi della funzione F .
2. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione F .
3. Calcolare $F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
4. (facoltativo) Spiegare perché F è infinitesima per $x \rightarrow 0$ e calcolare, se esiste, l'ordine di infinitesimo.
5. (facoltativo) Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{F(x)}$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

Data la funzione f definita da $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^3}$, rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione F definita da $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1. Determinare il dominio di F .
2. Determinare l'esistenza di asintoti verticali ed orizzontali di F , usando la relazione con gli integrali impropri e le equivalenze asintotiche.

3. Senza calcolare l'integrale, determinare crescita e decrescenza e disegnare il grafico di F
4. Calcolare $F(x)$ per ogni x nel dominio di F . Per determinare la primitiva di f usare la sostituzione $t = x + 1$.
5. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $P \equiv (1, F(1))$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = h \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di h , la soluzione ϕ_h di tale problema specificando il dominio.
2. Determinare per quali valori di h esiste almeno un $x_0 > 0$ tale che $\phi_h(x_0) = -4$
3. Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, le eventuali soluzioni della precedente EDO con condizioni

$$y(x_0) = -2, \quad y'(\frac{1}{2}) = b$$

4. Disegnare, al variare di $h > 0$ il grafico di ϕ_h

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)

Data l'equazione differenziale $y'' + 4y = -5 \cos(2x)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. L'equazione ha soluzioni limitate, illimitate, periodiche?
2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico che passa per il punto $P \equiv (0, -5)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = -5 + 3x$.
4. Studiare al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione il cui grafico passa per l'origine e per il punto $P \equiv (a, b)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.