–

Analisi Matematica I [B044] – Prova scritta Analisi I, appello 2, A.A.09/10 – 22 / 6 / 2010

– Compito n. **1**

Domanda 1)

Determinare dominio, insieme di continuità e insieme di derivabilità della funzione definita da $f(x) = \arcsin(\frac{10}{x^5})$ e calcolarne la derivata. La funzione è estendibile per continuità a zero? La funzione estesa (qualora esista) è derivabile in zero?

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Sia f la funzione definita da $f(x) = \frac{x^2 - 25}{(x+2)^3}$.

1. Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali, verticali.
2. Usare le proprietà delle funzioni continue ed il punto precedente per determinare il segno della funzione.
3. Disegnare il grafico della funzione.
4. Determinare numero e segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.
5. Calcolare l'area della parte di piano compresa dal grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = 4$ e $x = 6$. Per determinare la primitiva di f usare la sostituzione $t = x + 2$.
6. Rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione F definita da $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
   (a) Determinare il dominio di F.
   (b) Determinare eventuali asintoti verticali ed orizzontali di F
   (c) Senza calcolare l'integrale, determinare crescenza e decrescenza e disegnare il grafico di F
   (d) Calcolare $F(x)$ per ogni x nel dominio di F. Per determinare la primitiva di f usare la sostituzione $t = x + 2$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

1. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto P sia di minimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto P sia di minimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
3. Sia f la funzione definita da $f(x, y) = e^{3y} + 9e^{xy} + 7x^2$. Determinare l'approssimazione di McLaurin del quarto ordine di f e dedurne (qualora sia possibile) se l'origine è un punto di estremo locale per la funzione e se la funzione è localmente concava o convessa. Dedurre inoltre se l'insieme di livello $f(x, y) = f(0, 0)$ definisce, in un intorno dell'origine, una linea di livello e, in caso affermativo, determinarne la retta tangente.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

1. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto P sia di massimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto P sia di massimo relativo per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
3. Sia f la funzione definita da $f(x, y) = 4e^{xy} + 9x^2$. Determinare l'approssimazione di McLaurin del quarto ordine di f e dedurne (qualora sia possibile) se l'origine è un punto di estremo locale per la funzione. In caso affermativo specificare se si tratta di un punto di massimo o di minimo.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo per una funzione $f \in C^4((-2,4))$
2. Spiegare la relazione fra integrale di Riemann e area, illustrandola con un disegno.
3. Spiegare la relazione fra integrale di Riemann orientato e area, illustrandola con un disegno.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)
Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da

$$f(x) = x^4 \ln\left(1 - (25x)^5\right).$$

1. Determinare, se esiste, la parte principale per $x \to 0$ della funzione f
2. La funzione ha ordine per $x \to 0$? Se si, determinarlo.
3. Stabilire qual è la prima derivata non nulla in $x_0 = 0$ di f e determinarne il valore
4. Stabilire se la funzione ha in $x_0 = 0$ un massimo o un minimo locale.
5. Determinare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{f(x)}$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 7)
Assegnato $\epsilon \in \mathbb{R}$, rispondere alle seguenti domande sull'equazione differenziale $y'' - \epsilon y' + y = \sin(x)$.

1. Determinare al variare di $\epsilon \in [0,2]$, le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare al variare di $\epsilon \in (0,2)$, le soluzioni dell'equazione.
3. Determinare al variare di $\epsilon \in [0,2]$, le soluzioni dell'equazione.
4. Determinare al variare di $\epsilon \in (0,2)$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
5. Determinare al variare di $\epsilon \in [0,2]$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
6. Determinare per $\epsilon = 0$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
7. Determinare per $\epsilon = 1$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
8. Determinare per $\epsilon = 2$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.
9. Determinare per $\epsilon = 4$, la soluzione dell'equazione il cui grafico è tangente nell'origine alla retta $y = 0$ e stabilire se tale soluzione ha un estremo locale nell'origine.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 8)
Dopo aver enunciato il teorema di esistenza di una funzione implicita in $\mathbb{R}^2$ del tipo $y = \phi(x)$, verificare che l'equazione $2x + \sin(y) + 3xy = 0$, definisce una funzione implicita in $P \equiv (0,0)$ del tipo indicato. Determinare l'approssimazione del secondo ordine di tale funzione e dedurne il grafico locale.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 9)

1. Usare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili per determinare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |2-x| \leq 1\,,\ |3+y| \leq 2\}$$

e disegnarlo.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2 + 1}$. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.
3. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D.
4. Usare le proprietà delle funzioni continue su $\mathbb{R}^2$ per determinare l'immagine di D mediante f.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.