–

Analisi Matematica I [B044] – Prova scritta Analisi I 12cfu del primo appello A.A.09/10 – 1 / 6 / 2010

– Compito n. **1**

Domanda 1)

1. Enunciare la formula fondamentale del calcolo sulla relazione fra integrale di Riemann e primitive
2. Dimostrare il precedente risultato.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)

Sia f la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x+6 & x \leq -1 \\ \arctan(\frac{1}{x+1}) & x > -1 \end{cases}$.

1. Determinarne il dominio e l'insieme di continuità.
2. Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali, verticali.
3. Usare le proprietà delle funzioni continue ed il punto precedente per determinare il segno della funzione.
4. Disegnare il grafico della funzione.
5. Determinare numero e segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.
6. Calcolare l'area della parte di piano compresa dal grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = 2$ e $x = -7$.
7. Rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione F definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-3}^{x} f(t)dt$.
   (a) Determinare il dominio di F.
   (b) Determinare eventuali asintoti verticali ed orizzontali di F
   (c) Senza calcolare l'integrale, determinare crescenza e decrescenza e disegnare il grafico di F
   (d) Calcolare $F(x)$ per ogni x nel dominio di F.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)

Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da

$$f(x) = x^5 \sin(3x^3 - 5).$$

1. Determinare, se esiste, al variare di $n \in N$,
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{f(x)}$$
2. La funzione ha ordine per $x \to 0$? Se si, determinarlo.
3. Stabilire qual è la prima derivata non nulla in $x_0 = 0$ di f e determinarne il valore. Stabilire se la funzione ha in $x_0 = 0$ un massimo o un minimo locale.
4. Determinare il polinomio di McLaurin di ordine 23 di f, usando il simbolo di sommatoria. Si consiglia di usare le formule di addizione per il seno e quindi l'approssimazione di McLaurin di seno e coseno.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)

Data la funzione definita da $f(x, y, z) = (x + 6)^{4yz}$

1. Determinarne il dominio.
2. Determinarne il polinomio di McLaurin di ordine 4.
3. Dedurre dal punto precedente (se possibile) se l'origine è un punto di estremo locale

4. Dedurre dal punto secondo se l'origine è un punto in cui all'insieme di livello $f(x, y, z) = 1$ si puó applicare il teorema della funzione implicita.
5. Determinare in quali punti all'insieme di livello $f(x, y, z) = 1$ non si puó applicare il teorema della funzione implicita.
6. Studiare, per quanto possibile, l'insieme di livello $f(x, y, z) = 1$.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)

Dopo aver enunciato il teorema di esistenza di una funzione implicita in $\mathbb{R}^2$ del tipo $y = \phi(x)$, verificare che l'equazione $2x + \sin(y) + 3xy = 0$, definisce una funzione implicita in $P \equiv (0, 0)$ del tipo indicato. Determinare l'approssimazione del secondo ordine di tale funzione e dedurne il grafico locale.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)

1. Enunciare il teorema degli zeri per le funzioni di due variabili.
2. Applicare il precedente teorema per determinare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |3x + 6y| - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

e disegnarlo

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x + y - 6$. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolato a D.
4. Calcolare il massimo e il minimo di f vincolato a D

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 7)

Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = h \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di h, la soluzione ϕ_h di tale problema specificando il dominio.
2. Determinare per quali valori di h esiste almeno un $x_0 > 0$ tale che $\phi_h(x_0) = 4$
3. Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, le eventuali soluzioni della precedente EDO con condizioni

$$y(x_0) = -2\,, \quad y'(\frac{1}{2}) = b$$

4. Disegnare, al variare di $h > 0$ il grafico di ϕ_h

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 8)

Data l'equazione differenziale $y'' + \frac{11}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0$ sulla semiretta $(0, +\infty)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. Determinare per quali valori di $q \in \mathbb{R}$ la funzione $y = x^q$ è soluzione dell'equazione differenziale.
2. Usando i risultati del punto precedente, determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione il cui grafico passa per il punto $P \equiv (1, 11)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = 11 + 5(x - 1)$
4. Determinare, se esiste, la soluzione dell'equazione il cui grafico passa per i punti $P \equiv (1, 11)$ e $Q \equiv (2, 5)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.