Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica I
Esercizi
A.A 2008/2009

Gianna Stefani

Indice

Capitolo 1

Numeri reali e linguaggio

1.1 Prerequisiti

1. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni, esprimendole tramite unioni di intervalli e evidenziando le proprietà usate

$$3x+5 \leq 3 \ (<3), \quad \frac{3x+5}{x-7} \leq \frac{x}{x-1}, \quad |x+3| < 4 \ (\geq 4), \quad \frac{2x^2-4x}{x+7} \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x+5 \leq 3 \\ x+7 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x+5 \leq 3, \\ x-7 > 0 \end{cases}$$

$$|x+3| \leq |x-1|\,; \quad ||x+1|-2| < 1; \quad \frac{|x-1|}{|x+4|} \leq 1; \quad \sqrt{x^2-3} \leq |x+1|$$

2. Risolvere graficamente, usando la nozione di distanza le seguenti disequazioni

$|x-2| \leq 3,\ |x+5| \geq 1,\ |x+5| \geq -1,\ |x+5| \leq -1,\ x^2 < 1,\ x^4 > 16,\ |x-1| \leq |x+2|$

3. Data la disequazione
$$\frac{x+5}{x-3} < -4,$$
per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, dandone una spiegazione teorica.

   (a) La disequazione è equivalente a:
   i) $x+5 < -4(x-3)$
   ii) $x+5 > -4(x-3)$
   iii) se nessuna delle precedenti equivalenze è vera, determinarne una corretta.

   (b) L'insieme delle sue soluzioni è
   i) un intervallo limitato
   ii) un intervallo limitato e chiuso
   iii) un intervallo limitato e aperto
   iv) una semiretta
   v) l'unione disgiunta di un intervallo limitato e di una semiretta

4. Risolvere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ le disequazioni $|x-a| \leq b \ (<b)$ e $|x-a| \geq |x+b|$

5. Quali delle seguenti implicazioni fra numeri reali è corretta?

   - $a \geq 0 \iff -a \leq 0$

- $a \leq b \implies ac \leq bc$, $\forall c \in \mathbb{R}$
- $a \leq b$ e $c \leq 0 \implies ac \geq bc$
- $a^2 \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
- $a^2 > 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
- Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha $a^2 \leq b^2 \implies a \leq b$
- Siano $a, b \geq 0$. Si ha $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$
- Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha $a^2 \leq b^2 \iff a \leq b$

6. Date le tre *proprietà fondamentali* delle potenze (ad esponente reale):
   1) $a^x a^y = a^{x+y}$
   2) $(a^x)^y = a^{xy}$
   3) $a^x b^x = (ab)^x$,
   dedurne le seguenti ulteriori proprietà:
   4) $1/a^x = a^{-x}$
   5) $a^x/a^y = a^{x-y}$;
   6) $(a/b)^x = a^x/b^x$.

7. Determinare quoziente e resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi
$$x^3 - 2x^2 + 3 : x + 1\,, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 1$$
$$x^3 - 2x^2 + 3 : x^2 + 1\,, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$$

8. Senza eseguire la divisione, determinare il resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi
$$x^3 - 2x^2 + 3 : x + 5\,, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 3$$
$$x^5 + 2x^2 + 3 : x - 1\,, \quad x^4 + 2x^3 + 3 : x + 1$$
   E' possibile eseguire lo stesso esercizio con la divisione $x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$?

1.2 Logica e linguaggio

Di ogni enunciato da provare si individui l'ipotesi e la tesi

1. Dimostrare che $\sqrt{7}$ e $\sqrt{6}$ non sono razionali.

2. Dare la definizione di numero primo. Dimostrare che, se q è un numero primo, allora $\sqrt{q}$ non è razionale.

3. Dimostrare la seguente affermazione: *sia $n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ allora $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$*

4. Provare che la somma di due numeri razionali è un numero razionale.

5. Dedurre dall'esercizio precedente che la somma di un razionale e di un irrazionale è un irrazionale. Mostrare con un esempio che la somma di due irrazionali può essere razionale.

6. Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che
$$|x| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$
   Provare che risulta $x = 0$. *Dimostrazione* Per assurdo, supponiamo $x \neq 0$ e consideriamo $\epsilon_0 = |x|/2$. Essendo $x \neq 0$, si ha $0 < \epsilon_0 < |x|$ contro l'ipotesi.

7. Sia a un numero reale non negativo. Supponiamo che per ogni $\epsilon > 0$ si abbia $a \leq \epsilon$. Provare che $a = 0$.

8. Provare che il quadrato di un numero (naturale) dispari è dispari. Pertanto, se il quadrato di un numero è pari, tale numero è necessariamente pari.

1.3 Intervalli e proprietà di completezza

Di ogni enunciato da provare si individui l'ipotesi e la tesi

1. Provare che l'intersezione di due intervalli è un intervallo (eventualmente vuoto o costituito da un sol punto).

2. Mostrare con un esempio che l'unione di due intervalli può non essere un intervallo.

3. Provare che se due intervalli hanno intersezione non vuota, allora la loro unione è un intervallo.

4. Provare che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste un numero c tale che $|x| \leq c$, $\forall\, x \in X$.

5. Mostrare che il massimo di un insieme, quando esiste, coincide con l'estremo superiore. Provare inoltre che l'estremo superiore di un insieme, quando appartiene all'insieme, coincide col massimo.

6. Provare che se $A \subseteq B$ allora $\sup A \leq \sup B$. Osservare inoltre che, in virtù della convenzione $\sup \emptyset = -\infty$, tale relazione è verificata anche quando $A = \emptyset$.

7. Si consideri l'insieme $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ e si dimostri, usando le definizioni di estremo inferiore e di estremo superiore, che $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$. Quale di essi è massimo o minimo?
   Suggerimento (per l'estremo inferiore). Si usi la Proprietà di Archimede per mostrare che X non ammette minoranti positivi.

8. Sia $A \subset \mathbb{R}$, definire il significato della scrittura $5 = \sup A$.

9. Sia $A = \{1 + x : x \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Determinare $\sup A$ e $\inf A$ e dimostrare il risultato ottenuto.

10. Sia
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - 1/n^2), n \in \mathbb{N}\} .$$
provare che $\sup A = 1; \quad \inf A = -1$.

11. Sia
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}\} .$$
Provare che $\sup A = +\infty$ e che $\inf A = -\infty$.

Capitolo 2

Funzioni reali di variabile reale

2.1 Elementi di base

1. Date $f : x \mapsto x^2,\ g : x \mapsto \sqrt{x},\ h : x \mapsto 1/x$, calcolare $f \circ g,\ g \circ f, h \circ h$, specificando il dominio.

2. Determinare, quando esistono, le funzioni inverse delle seguenti funzioni, specificando il dominio della funzione e dell'inversa

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^2 - 2x + 3\,, f(x) = x^2 - 2x + 3 \ \text{ con dominio } \ [2, +\infty) \\
&f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \ \text{ con dominio } \ (-\infty, 1) \\
&f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \ \text{ con dominio } \ (1, 2)\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \ \text{ con dominio } \ [1, 2] \\
&f(x) = 2^{x+3}\,, \quad f(x) = 2^{x^2+3} \ \text{ con dominio } \ [2, +\infty) \\
&f(x) = \log_2(x^3)\,, \quad f(x) = \log_2(x^2 - 1) \\
&f(x) = \log_2(x^2 + 1) \ \text{ con dominio } \ (-\infty, 0)
\end{aligned}$$

3. Determinare il dominio e l'immagine delle funzioni definite da

$$f(x) \ = \ \sqrt{2\cos(x) + 1},\ \sqrt{2\cos(x) \pm 4},\ \sqrt{\frac{1}{|\tan(x)|}},\ \arcsin{(x^2 - 1)},\ \arctan{(\frac{1}{x})}$$

e il dominio della funzione $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x + \sin(\pi x)}{\sqrt{1 - x^2}}}$,

4. Usando i concetti di cambio scala, traslazione e simmetria disegnare i grafici delle seguenti funzioni a partire da grafici noti e determinarne l'immagine

$$x \mapsto \sqrt{1 - x} + 1,\ \sin{(|x|)}\,,\ |\sin{(x)}|\,,\ \sin{(\pi x)}\,,\ |\arcsin(x/\pi)|,\ 2\arctan(|x|) - 2$$

$$x \mapsto e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{|x|}, \quad e^{-|x|}, \quad y = -e^{-|x|}$$

$$x \mapsto \ln(x), \quad \ln(-x), \quad \ln(|x|), \quad \ln(-|x|), \quad |\ln(x)|, \quad -\ln(-x), \quad -\ln(|x|)$$

14. Usando l'uguaglianza $\frac{x+5}{x-3} = 1 + \frac{8}{x-3}$, e i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico $y = \dfrac{x+5}{x-3}$, risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{x+5}{x-3} < -4$.

5. Calcolare il dominio delle funzioni $x \mapsto \ln(x)^{\arcsin(x)}$, $\quad x \mapsto \arcsin(x)^{\ln(x)}$

6. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x & x \in [-1,1] \\ -x^2 & x > 1\,, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 1 \\ x & x \in [1,2] \\ 2 - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

7. Dimostrare che esiste una applicazione biunivoca fra l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri naturali divisibili per 7.

8. Scrivere le seguenti funzioni reali di variabile reale come funzioni definite a tratti, specificando il dominio

$$x \;\mapsto\; \ln(|x^2-1|)\,,\ |\ln(x^2-1)|\,,\ |\arcsin(x^2-9)|\,,\ \arccos(|1-x^2|)$$

9. Di tutte le funzioni considerate cercare di determinare estremo superiore, inferiore, massimo, minimo (se esistono) e gli eventuali punti di massimo e minimo. **Per massimo (minimo) si in tende il massimo (minimo) globale**.

2.2 Continuità

1. Considerare le funzioni reali di una variabile reale degli esercizi proposti precedentemente. Di esse determinare in quali insiemi sono continue.

2. Delle seguenti funzioni si disegni il grafico e si determinino gli eventuali punti di discontinuità

$$x \;\mapsto\; \arcsin(x+5) - \pi/4, \quad |\arcsin(x+5) - \pi/4|, \quad \ln(x-1)+1, \quad |\ln(x-1)+1|$$

$$x \;\mapsto\; \cos(\pi(x+1)), \quad |\cos(\pi(x+1))|, \quad \arctan(x-1) - \pi/2, \quad |\arctan(x-1) - \pi/2|$$

3. Disegnare il grafico della seguente funzione e determinare l'esistenza di discontinuità

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x < -1 \\ \arccos(x) & x \in [-1,1] \\ \arctan(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

4. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni

$$\arccos(x-5) - \pi/4 = k, \quad (x-1)^2 - 1 = k$$

5. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, per tutte le funzioni f definite nei precedenti esercizi

6. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano continue su tutto $\mathbb{R}$

$$x \;\mapsto\; \begin{cases} 3x+5 & x \le 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a+5 & x \le 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \le 0 \\ \sin(x+a) & x > 0 \end{cases},$$

7. Determinare il dominio e gli zeri delle seguenti funzioni. Determinarne anche il segno usando il teorema degli zeri

$$x \;\mapsto\; (x^3-9x)(x^2+2x+1), \quad x\cos(x), \quad \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x-4}, \quad \frac{x^3-2x^2+x}{x^4-16}$$

2.3 Derivate

1. Per tutte le funzioni precedentemente considerate, stabilire l'esistestenza della derivata.

2. Determinare, per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano appartenere a $C^1(\mathbb{R})$ e a $C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} 3x+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \leq 0 \\ \sin(x+a) & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{ax} & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$$

   Per i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni risultano continue ma non derivabili in $x = x_0$, determinare se x_0 e' un punto angoloso.

3. Determinare, per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano appartenere a $C^1(\mathbb{R})$ e a $C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} a\cos(3x) & x \leq 0 \\ ax+bx^2 & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a\cos(3x) & x \leq 0 \\ a+bx^2 & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2ax^2+bx+1 & x \leq 1 \\ ax+2b & x > 1 \end{cases}$$

   Per i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni risultano continue ma non derivabili in x_0, determinare se x_0 e' un punto angoloso.

4. Siano date le funzioni definite da

$$f_1(x) = \sqrt{x+3} - 5, \; f_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$f_4(x) = \left|x^3 - 1\right| + 3, \quad f_5(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|, \quad f_6(x) = \sqrt[7]{x - x^2}$$

$$f_7(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}, \quad f_8(x) = \sqrt{|x^2 - 3x - 4|}, \quad f_9(x) = \exp(|x - x^2|),$$

$$f_{10}(x) = \exp(-\sqrt{x+3}), \; f_{11}(x) = \ln(\frac{x}{1-x}), \quad f_{12}(x) = \ln(\sqrt{1-x^2}).$$

   Determinare in quali punti sono continue, in quali sono derivabili e gli eventuali punti angolosi.

5. Dimostrare che fra tutti i triangoli isosceli di assegnata area A ne esiste uno di perimetro minimo. Ne esiste uno di perimetro massimo?

6. Dimostrare che fra tutti i triangoli isosceli di assegnato perimetro $2p$ ne esiste uno di area massima. Ne esiste uno di area minima?

7. Determinare dominio, segno, intervalli di crescenza e decrescenza ed eventuali punti a tangente orizzontale delle funzioni $x \mapsto f(x)$, dove $f(x)$ è dato da una delle seguenti espressioni

$$(x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x^3 - 2x^2 + x - 1, \quad \frac{x^3}{x+7}, \quad x^3 - 2x - 1, \quad \frac{x}{x^2+7}$$

$$\frac{x^4}{x^2+7}, \quad \frac{-x^2}{x^4+7}, \quad \frac{x^2-2x+3}{x+7}, \quad \frac{x+7}{x^2-2x+3}.$$

   Determinare i punti di massimo e minimo relativo. Determinare inoltre quale delle precedenti funzioni ammette massimo o minimo sull'intervallo $[-3, 1]$

8. Determinare al variare di $A \in \mathbb{R}$, il minimo (massimo), se esiste, della funzione definita da
$$p(x) = 2(x + \frac{A}{x})$$
sulla semiretta $(0, \infty)$. Osservare che se $A > 0$, la funzione indica il perimetro di un rettangolo di area fissata.

9. Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.
Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}}$
   a. Determinare il dominio.
   b. La funzione è pari, dispari, periodica?
   c. Determinare i punti in cui la funzione è continua.
   d. Spiegare perché, dopo aver risposto ai precedenti quesiti, posso affermare che f ammette massimo e minimo.
   e. Determinare i punti in cui f è derivabile e gli eventuali punti singolari (dove è continua ma non derivabile).
   f. Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico nei punti di ascissa $x = -5, \sqrt{3}, 2$.
   g. Spiegare, da un punto di vista teorico, come si possono trovare il massimo e il minimo della funzione e calcolarli. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione.
   h. Disegnare il grafico di f

10. Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto \left| \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}} - 1 \right|$
   (a) Usando il grafico della f definita sopra, disegnare il grafico di g
   (b) Determinare l'immagine di g
   (c) Determinare i punti angolosi di g e le tangenti destre e sinistre in tali punti
   (d) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione
$$g(x) = k$$

11. Data la funzione definita da $f(x) = \tan(\sqrt{x})$, detetminarne il dominio e l'insieme dei punti in cui e' derivabile. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\pi^2/9, f(\pi^2/9))$

12. Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(2x)$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$

13. Determinare il dominio della funzione definita da
$$f(x) = (\cos(x))^x.$$
Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$

14. Spiegare perche' possiamo affermare che esiste un rettangolo di area massima inscritto in un cerchio di raggio 3. Calcolare tale area.

15. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione definita da $f(x) = |x^3 - 3|$ nell'intervallo $[0, 5]$.

16. Disegnare il grafico di $y = |x^4 - 16|$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 5]$.

17. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione definita da $f(x) = (x-1)^2 - 4\ln(x-1)$ nell'intervallo $\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 5\right]$.

18. A partire dal grafico della funzione esponenziale (che deve essere noto), mediante traslazioni e simmetrie, disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = |e^x - 1|$. Determinare il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$

19. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione

$$e^{-(x-3)^2} = k$$

20. Delle funzioni precedentemente considerate, **determinare gli intervalli di crescenza, decrescenza e**, se i calcoli non risultano troppo gravosi, **quelli di convessità e concavità**. Inoltre **disegnarne i grafici "al finito"** (cioè senza usare il concetto di limite) **e indicarne i possibili andamenti**.

    Esempio. Studiare il grafico della funzione $f : x \mapsto x^x$.

    Svolgimento. Posso scrivere $f(x) = e^{x\ln(x)}$, quindi dal teorema di derivazione delle funzioni combinate posso dedurre che è $C^\infty(\mathbb{R}^+)$. Inoltre

$$f'(x) = e^{x\ln(x)}(\ln(x) + 1) \tag{2.1}$$
$$f''(x) = e^{x\ln(x)}[(\ln(x) + 1)^2 + 1/x]. \tag{2.2}$$

Ne segue che la funzione è convessa, decrescente su $(0, 1/e]$ e crescente su $[1/e, +\infty)$, inoltre la funzione è superiormente illimitata (infatti lo è la funzione $x \mapsto x\ln(x)$). Posso qundi dedurre che la funzione ha minimo, $m = 1/(e^{1/e}) \in (0, 1)$, raggiunto nell'unico punto di minimo $x_0 = 1/e$. Per disegnare il grafico resta solo da stabilire quale delle due seguenti alternative è soddisfatta:

- $f_{|(0,1/e)}$ è superiormente illimitata.
- $\sup f_{|(0,1/e)} = \ell \in \mathbb{R}$ (quindi necessariamente $\ell \in \mathbb{R}^+$), cioè f è estendibile per continuità a zero con $f(0, 1/e) = \ell$.

Lo studente disegni il grafico in ciascuna delle due possibilità. Dopo aver fatto la teoria dei limiti, vedremo che la seconda alternativa è quella giusta e $\ell = 1$. Per adesso, usando le proprietà delle potenze, si può dimostrare che $\ell = 1$ è un maggiorante per $f_{|(0,1/e)}$.
N.B. Lo studente è tenuto a dimostrare, usando la teoria fin qui svolta tutte le affermazioni contenute nel precedente svolgimento.

2.4 Formula di Taylor

2.4.1 Esercizi svolti

1. Determinare la formula di MacLaurin del quinto ordine di

$$f(x) = \frac{x^5 e^{-x}\cos(2x)}{|2 - x^8 + 3x^{10}|}.$$

Svolgimento. Si osservi che $f(x) = x^5 g(x)$, dove

$$g(x) = \frac{e^{-x}\cos(2x)}{|2 - x^8 + 3x^{10}|}$$

è una funzione continua. Pertanto $g(x) - g(0) = \epsilon(x)$, e da ciò si deduce che

$$f(x) = x^5(g(0) + \epsilon(x)) = \frac{x^5}{2} + \epsilon(x)x^5.$$

2. Calcolare la derivata quinta nel punto $x_0 = 2$ della funzione

$$f(x) = \frac{(2-x)^6\cos(x) + (2-x)^5 x^2}{1 + x^7}.$$

Svolgimento. Allo scopo è sufficiente determinare la formula di Taylor di $f(x)$ del quinto ordine in $x_0 = 2$. Ponendo $x = 2 + h$ e sostituendolo nell'espressione di $f(x)$ si ottiene

$$f(2+h) = \frac{(-h)^6\cos(2+h) + (-h)^5(2+h)^2}{1 + (2+h)^7}$$

$$= \epsilon(h)h^5 - h^5\frac{(2+h)^2}{1+(2+h)^7} = \epsilon(h)h^5 - h^5(\frac{4}{129} + \epsilon(h)) = -\frac{4}{129}h^5 + \epsilon(h)h^5.$$

Quindi, per l'unicità della formula, risulta

$$f^{(5)}(2) = -\frac{4}{129}5! = -\frac{480}{129} = -\frac{160}{43} = -3.72093\ldots$$

3. Determinare la formula di MacLaurin dell'ottavo ordine della funzione

$$f(x) = 2x - x^3\cos(2x) + |x|x^8 e^{-x}\cos(x).$$

Svolgimento. Osserviamo che il termine $|x|x^8e^{-x}\cos(x)$ è della forma $\epsilon(x)x^8$, con $\epsilon(x) = |x|e^{-x}\cos(x)$. Quindi è sufficiente calcolare la formula di MacLaurin del quinto ordine di $\cos(2x)$ (la moltiplicazione per x^3 produrrà infatti un resto del tipo $\epsilon(x)x^8$). Poiché l'uguaglianza

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \epsilon(x)x^5$$

è verificata per ogni numero x, sostituendo il numero $2x$ al posto di x si ottiene

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \epsilon(x)x^5.$$

In conclusione, si ha

$$f(x) = 2x - x^3 + 2x^5 - \frac{2}{3}x^7 + \epsilon(x)x^8.$$

4. Si determini la formula di MacLaurin del nono ordine della funzione $f(x) = x^5\cos(3x)$. Si calcoli successivamente $f^{(6)}(0)$ e $f^{(7)}(0)$.

Svolgimento. Dobbiamo arrivare ad un'uguaglianza del tipo

$$f(x) = p_9(x) + \epsilon(x)x^9,$$

dove $p_9(x)$ è un polinomio di grado non superiore al nono. Se quindi determiniamo la formula di MacLaurin del quarto ordine della funzione $\cos(3x)$, che sarà del tipo

$$\cos(3x) = p_4(x) + \epsilon(x)x^4,$$

con $p_4(x)$ un polinomio di grado non superiore al quarto, otteniamo l'uguaglianza cercata. Ricordiamo la formula di MacLaurin del quarto ordine di $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \epsilon(x)x^4.$$

Poiché la suddetta uguaglianza è verificata per ogni numero $x \in \mathbb{R}$, sostituendo x con $3x$, e osservando che una funzione del tipo $81\epsilon(3x)$ è anche del tipo $\epsilon(x)$, si ottiene

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + \epsilon(x)x^4.$$

Pertanto

$$x^5\cos(3x) = x^5 - \frac{9}{2}x^7 + \frac{27}{8}x^9 + \epsilon(x)x^9,$$

che è la formula MacLaurin cercata. Poiché, fissato l'ordine, la formula di MacLaurin è unica (teorema di unicità), dal teorema di esistenza si deduce che

$$f^{(6)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\frac{9}{2} \quad \Longrightarrow \quad f^{(7)}(0) = -22680,$$

che conclude il quesito. □

5. Determinare la formula di Taylor di centro $x_0 = \pi$ del quarto ordine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{\pi - x} & \text{se} \quad x \neq \pi \\ 1 & \text{se} \quad x = \pi \end{cases}$$

Si calcoli successivamente $f''(\pi)$.

Svolgimento. Dal momento che $x_0 \neq 0$, ponendo $x - x_0 = h$, si ottiene

$$f(\pi + h) = -\frac{\sin(\pi + h)}{h} = -\frac{\sin(\pi)\cos(h) + \cos(\pi)\sin(h)}{h} = \frac{\sin(h)}{h} \quad \text{per} \quad h \neq 0$$

e $f(\pi + h) = 1$ per $h = 0$. Determinare la formula di Taylor di $f(x)$ con centro in $x_0 = \pi$ equivale a determinare la formula di MacLaurin della funzione

$$g(h) := f(\pi + h) = \begin{cases} \frac{\sin(h)}{h} & \text{se} \quad h \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad h = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il quesito dobbiamo quindi ottenere un'uguaglianza del tipo

$$g(h) = p_4(h) + \epsilon(h)x^4,$$

dove $p_4(h)$ è un polinomio di grado non superiore al quarto. In analogia col precedente esercizio possiamo pensare di dividere per h la formula di MacLaurin del quinto ordine di $\sin(h)$ per ottenere quella del quarto ordine della funzione $g(h)$. Tale ragionamento è corretto *solo se* (ma non necessariamente *se*) il termine noto (quello

di grado zero) della formula di MacLaurin per la funzione seno è nullo. Ricordando che
$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \epsilon(h)h^5,$$
si ottiene
$$g(h) = \begin{cases} 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} + \epsilon(h)h^4 & \text{se} \quad h \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad h = 0 \end{cases}$$
e poiché la funzione $1 - h^2/3! + h^4/5! + \epsilon(h)h^4$ (che coincide con $g(h)$ per $h \neq 0$) è definita anche per $h = 0$ e vale proprio $g(0)$ in tal punto, è superfluo distinguere i due casi "$h \neq 0$" e "$h = 0$": possiamo più semplicemente scrivere l'uguaglianza
$$f(\pi + h) = g(h) = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} + \epsilon(h)h^4, \quad \forall\, h \in \mathbb{R},$$
che dà la formula cercata. Quindi
$$\frac{f''(\pi)}{2!} = -\frac{1}{3!} \quad \Longrightarrow \quad f''(\pi) = -\frac{1}{3},$$
che conclude il quesito. $\square$

2.4.2 Esercizi proposti

1. Determinare la derivata quinta e la derivata sesta nel punto $x_0 = 0$ della funzione
$$f(x) = 2x - x^3\cos(2x) + |x|x^8 e^{-x}\cos(x)$$
già considerata nel precedente esercizio 3.

2. Determinare la formula di MacLaurin del quinto ordine della funzione
$$f(x) = |x|x^5\cos(x) - x^2\sin(2x)$$
e calcolare $f^{(5)}(0)$.

3. Considerare le funzioni definite da
$$f(x) = \frac{x^5 e^{-x}\cos(2x)}{|2 - x^8 + 3x^{10}|}, \quad g(x) = \frac{e^{-x}\cos(2x)}{|2 - x^8 + 3x^{10}|}$$
già considerate nell'esercizio svolto n.1.

   (a) Usare una opportuna formula di McLaurin per $p(x) = 2 - x^8 + 3x^{10}$ per stabilire che la p ha un massimo locale in $x = 0$.

   (b) Verificare che $|2 - x^8 + 3x^{10}| = 2 - x^8 + 3x^{10}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

   (c) Determinare la formula di McLaurin di ordine 8 di $f(x)$.
   Suggerimento: osservare che $g(x) = e^{-x}\cos(2x)(2 - x^8 + 3x^{10})^{-1}$

4. Scrivere le formule di McLaurin di ordine 3 delle funzioni definite da
$$f(x) = \ln(\cos(x)), \ \sqrt{4 + x}$$

5. Scrivere la formula di McLaurin di ordine n della funzione definita da $f(x) = \sin(x^n)$ e dedurne, al variare di $n \in \mathbb{N}$ se la funzione ha un massimo o un minimo locale in $x = 0$.

6. Scrivere la formula di McLaurin di ordine n della funzione definita da $f(x) = \cos(x^n)$ e dedurne, al variare di $n \in \mathbb{N}$ se la funzione ha un massimo o un minimo locale in $x = 0$.

7. Dalle formule di Taylor o McLaurin determinate negli esercizi svolti, dedurre se le rispettive funzioni hanno un punto di massimo o minimo locale nel centro x_0. Inoltre disegnarne l'andamento locale.

8. Considerare la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & x > 0 \\ x + ax^2 - \frac{x^k}{6} & x \leq 0\,, \end{cases}$$
dove $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N},\ k > 0$. Usando appropriate formule di McLaurin, verificare che $f \in C^0(\mathbb{R})$ per ogni valore dei parametri. Inoltre stabilire, al variare dei parametri, a quale classe $C^n(\mathbb{R})$ appartiene la fuzione.

9. Sia f una delle funzioni considerate negli esercizi della precedente sezione 2.3. Se x_0 è un punto tale che $f'(x_0) = 0$, usare una opportuna formula di Taylor per stabilire se la funzione ha un massimo o minimo locale in x_0.

10. Considerare le funzioni definite da
$$f_1(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}\,, \quad f_2(x) = \sin(x) + \cos(x)\,, \quad f_3(x) = \sin(x) - \cos(x).$$
Usando la formula di Mclaurin di ordine 3 per f_1 e quella di ordine 2 per f_2 e f_3, stabilire se le funzioni sono localmente crescenti, decrescenti, concave o convesse e disegnarne l'andamento locale.

2.5 Limiti

2.5.1 Esercizi svolti

1. Dimostrare in base alla definizione di limite che $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

   Svolgimento. In base alla definizione fissiamo $\epsilon > 0$ e scriviamo le disequazioni $-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$. La prima delle due, $-\epsilon < x^2 - 4$, è verificata per ogni x se $\epsilon > 4$. Se invece $\epsilon \leq 4$, la disequazione è verificata se $x < -\sqrt{4-\epsilon}$ oppure $x > \sqrt{4-\epsilon}$. La condizione $x < -\sqrt{4-\epsilon}$ non interessa perché stiamo studiando il comportamento di x vicino a 2. La condizione $x > \sqrt{4-\epsilon}$ si scrive in modo equivalente come $x > 2 - (2 - \sqrt{4-\epsilon})$. Scelto allora $\delta_1 = 2 - \sqrt{4-\epsilon}$ (si ricordi che siamo nel caso $\epsilon \leq 4$), se $2 - \delta_1 < x$, la disequazione $-\epsilon < x^2 - 4$ è soddisfatta.

   La seconda disequazione $x^2 - 4 < \epsilon$ è soddisfatta se e solo se $-\sqrt{4+\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$. La condizione $x < \sqrt{4+\epsilon}$ si scrive in modo equivalente come $x < 2 + (\sqrt{4+\epsilon} - 2)$. Se scegliamo $\delta_2 = \sqrt{4+\epsilon} - 2$ (tale numero è positivo), la disequazione $x^2 - 4 < \epsilon$ è soddisfatta se $-\sqrt{4+\epsilon} < x < 2 + \delta_2$.

   In conclusione, fissato $\epsilon > 0$, la disequazione $|x^2 - 4| < \epsilon$ è verificata se $|x - 2| < \delta$, dove δ è il più piccolo tra δ_1 e δ_2. Il lettore può osservare che in questo particolare esercizio non c'è bisogno di imporre la condizione $x \neq 2$ e che il limite equivale al valore della funzione in 2 (infatti la funzione è continua).

2. Determinare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^4\cos(x) + x^3}\,.$$

Svolgimento. Ricordiamo che per $\sin(t)$ si ha

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \epsilon(t)t^3 \, .$$

Con la sostituzione $t = 2x$ si ottiene

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}\,x^3 + 8\epsilon(2x)x^3 = 2x - \frac{4}{3}\,x^3 + \epsilon(x)x^3 \, ,$$

che è ancora un'uguaglianza. D'altra parte $x^4\cos(x) = x\cos(x)x^3 = \epsilon(x)x^3$. Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x) - 2x}{x^4\cos(x) + x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x - \frac{4}{3}\,x^3 + \epsilon(x)x^3) - 2x}{\epsilon(x)x^3 + x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}\,x^3 + \epsilon(x)x^3}{\epsilon(x)x^3 + x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3} + \epsilon(x)}{\epsilon(x) + 1} = \frac{-\frac{4}{3} + \epsilon(0)}{\epsilon(0) + 1} = -\frac{4}{3} \, .$$

3. Dire in quali punti è derivabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La restrizione di f all'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ vale $x^2\cos(\frac{1}{x})$ ed è quindi derivabile con $f'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$. Per vedere se c'è derivabilità anche in zero si prova a calcolare il limite del rapporto incrementale. Risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$$

(si tratta del prodotto di una funzione che tende a zero per una limitata). Quindi f è derivabile in tutto il suo dominio con

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

La f' è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma è discontinua in zero. Infatti il

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})\right)$$

non esiste. Un tipico errore che si rischia di commettere nell'affrontare questo esercizio (e altri simili) è quello di affermare che la funzione non è derivabile in zero perché $2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$ non è calcolabile in $x = 0$ (in quanto si annulla un denominatore). Tale ragionamento è sbagliato per il seguente motivo: la funzione $x \mapsto 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$ è la derivata di f in $x \neq 0$, mentre $f'(0) = 0$. In altre parole non c'è nessun motivo per dire che la possibile derivata della funzione di partenza f, in $x = 0$, debba essere $2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$ calcolata in $x = 0$.

2.5.2 Esercizi proposti

1. Delle funzioni degli esercizi proposti nelle precedenti sezioni, determinare i limiti per x che tende a tutti i punti di accumulazione del dominio e stabilire se ammettono asintoti orizzontali e verticali.

2. Usando i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

e calcolarne graficamente i limiti per x che tende a ± 1 e $\pm\infty$. Fare la verifica dei limiti trovati, usando la definizione.

3. Date le funzioni $f : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in (n-1, n]$, $g : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n, n+1)$, disegnarne il grafico e determinare al variare di $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to n^\pm} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to n^\pm} g(x).$$

La funzione g si chiama *parte intera.*

4. Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Calcolare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x)$$

5. Sia $f(x) = \frac{ax^3+x^2+1}{bx^4+cx^3+x}$. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x).$$

6. Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + e^{-x} + \cos(x) - 2}{x^n}$$

7. Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n \sin(1/x^3)$$

8. **Confronti asintotici.** Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette, specificandone il motivo

   (a) $x^2 \ln(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$
   (b) $x^2 \ln(x) = o(x \ln(x))$ per $x \to 0^+$
   (c) $x \ln(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$
   (d) $x^2 \ln(x) = o(x^r)$ per $x \to 0^+$ se $r \in (0, 1)$
   (e) $x^2 \ln(x) = o(x^r)$ per $x \to 0^+$ se $r > 0$
   (f) $\sin(x) = o(x^r)$ per $x \to 0$ se $r \in (0, 1]$
   (g) $\sin(x) = o(x^r)$ per $x \to 0$ se $r \in (0, 1)$
   (h) $\sin(x) \sim x^r$ per $x \to 0$ se $r > 1)$
   (i) $\cos(x) - x \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0$
   (j) $\cos(x) - 1 = o(x)$ per $x \to 0$
   (k) $\cos(x) - x \sim x$ per $x \to 0$
   (l) $\exp(1/x^2) \sim \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to 0$

(m) $\exp(1/x^2) = o(x^r)$ per $x \to 0$ se $r \geq 1$

(n) $\exp(-1/x^2) = o(1)$ per $x \to \infty$

(o) $\exp(-1/x^2)$ è un infinitesimo di ordine 10^{20} per $x \to 0$

(p) $\sin(7x^4) + \exp(-1/x^2)$ è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$

(q) $\sin(7/n)\exp(-n)$ è una successione infinitesima di ordine 1

(r) $\sin(7/n) - \exp(-n)$ è una successione infinitesima di ordine 1

(s) $\sin(7/n)\exp(-n) = o(1/n!)$

(t) $1/n! = o(\sin(7/n)\exp(-n))$

2.6 Ricapitolazione

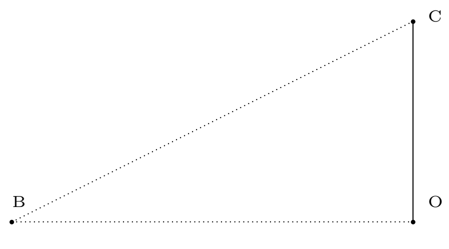
1. Completare il grafico delle funzioni precedentemente considerate, determinando l'esistenza di asintoti.

2. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \dfrac{\ln(|x|)}{x}$.

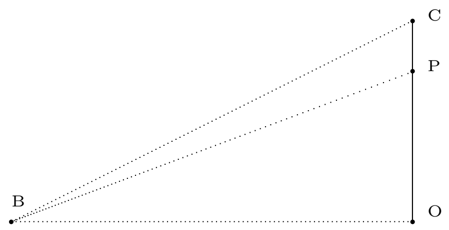
3. Determinare il dominio e disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = x^{x-1}$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, f(1))$

4. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = -2\ln\left(x^3 - 5\right) + 3x$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(6, f(6))$.

5. Supponiamo che il disegno in figura rappresenti una spiaggia dove nel punto B abbiamo il nostro ombrellone. Vogliamo andare al bar che si trova nel punto C. Dal punto O parte una passerella di legno che raggiunge il bar e sulla quale si cammina più velocemente che sulla sabbia. Precisamente: supponiamo che sulla sabbia si cammini alla velocità di 1 metro al secondo, mentre sulla passerella alla velocità di $2\,m/s$. Supponiamo anche che i segmenti OB e OC siano tra loro perpendicolari. Inoltre la passerella è lunga 10 metri, mentre il tratto OB è 15 m. Partendo da B, determinare in quale punto della passerella conviene salire, per poi raggiungere il bar continuando a camminare su di essa, al fine di rendere minimo il tempo per arrivare dall'ombrellone al bar.



Svolgimento. Sia P il punto in cui si inizia a camminare sulla passerella. Chiamiamo x la misura del segmento OP. Il tratto percorso, indichiamolo con s, è funzione di $x \in [0, 10]$. Precisamente $s(x) = BP + PC = \sqrt{225 + x^2} + (10 - x)$. Anche il tempo impiegato $t(x)$ è funzione di x e si ottiene dal rapporto spazio/velocità: $t(x) = \sqrt{225 + x^2} + \frac{10-x}{2}$.



Studiando la funzione t si ricava che $5\sqrt{3}$ è il punto di minimo assoluto. Pertanto conviene salire sulla passerella nel punto P che dista $5\sqrt{3}$ metri da O. Quale sarebbe stata la conclusione dell'esercizio se la distanza OB fosse stata 18 metri? (si interpretino i calcoli con attenzione).

6. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni

$$\arccos(x-5) - \pi/4 = k, \quad (x-1)^2 - 1 = k$$

7. Disegnare il grafico della seguente funzione e determinare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali e di discontinuità

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x < -1 \\ \arccos(x) & x \in [-1,1] \\ \arctan(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

8. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, per tutte le funzioni di cui si è disegnato il grafico.

9. Determinare il segno delle seguenti funzioni, usando il teorema degli zeri e le equivalenze asintotiche

$$(x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x\cos(x), \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}, \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^4 - 16}.$$

10. Usando le proprietà delle funzioni continue ed il concetto di limite dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^{37} + 3x^{10} + 1}{x^2 + 1} = k$$

ammette soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La funzione $f : x \mapsto \frac{x^{37}+3x^{10}+1}{x^2+1}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ poiché il polinomio $x^2 + 1$ non ammette radici reali, ne segue che la sua immagine è un intervallo. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{37} + 3x^{10} + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{35} = \pm\infty,$$

quindi f è superiormente e inferiormente illimitata. L'unico intervallo superiormente ed inferiormente illimitato è $\mathbb{R}$, che coincide quindi con l'immagine di f. Ne segue che il grafico di f interseca tutte le rette orizzontali, cioè l'equazione $f(x) = k$ ammette soluzioni per ogni $k \in \mathbb{R}$.

11. Per quali valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} h(x-3)^x & \text{se} \quad x > 3 \\ k + x^4 & \text{se} \quad x \leq 3 \end{cases}$$

appartiene a $C^0(\mathbb{R})$?

12. Per quali valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} h\, x \exp(1/x) & \text{se} \quad x > 0 \\ k + x^4 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

appartiene a $C^0(\mathbb{R})$?
Svolgimento. f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} hx\exp(1/x) = \begin{cases} +\infty & h > 0 \\ 0 & h = 0 \\ -\infty & h < 0 \end{cases} \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0}(k + x^4) = k = f(0)\,,\ \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quindi $f \in C^0(\mathbb{R})$ se e solo se $h = k = 0$.

2.6.1 Esempi di test a risposta aperta

Nel seguito si danno possibili risposte a quesiti proposti. Si noti che le risposte possono seguire strade diverse, la cosa importante è che gli oggetti menzionati siano ben quantificati e le implicazioni evidenti o giustificate da teoremi

1. *Verificare, usando la definizione, che* $\lim_{x\to-\infty} 1/x^2 = 0^+$
Dimostrazione. Per ogni $\epsilon > 0$ la disequazione $0 < 1/x^2 < \epsilon$ ha fra le sue soluzioni la semiretta definita da $x < -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, quindi posso affermare che:
$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ tale che da $x \in (-\infty, \delta)$ segue $1/x^2 \in (0, \epsilon)$, che è la definizione del limite richiesto.

2. *Dimostrare che da* $\lim_{x\to+\infty} x/e^x = 0$ *si deduce* $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$*, evidenziando ipotesi e tesi.*
Ipotesi: $\lim_{x\to+\infty} x/e^x = 0$
Tesi: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
Dimostrazione: Usando la sostituzione $t = -x$, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to+\infty} (-t)e^{-t} = -\lim_{x\to+\infty} x/e^x.$$

Usando l'ipotesi abbiamo quindi $\lim_{x\to-\infty} xe^x = -0 = 0$.
Dimostrazione alternativa: Usando l'ipotesi e la sostituzione $t = -x$, si ha:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} x/e^x = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t}{e^{-t}} = -\lim_{x\to-\infty} xe^x$$

cioè $\lim_{x\to-\infty} xe^x = -0 = 0$

3. *Dire se la seguente affermazione è corretta, specificandone il motivo:* $f(x) = \sin(7x^4) + \exp(-1/x^2)$ *è un infinitesimo di ordine* 4 *per* $x \to 0$.

   Svolgimento. Poiché $e^{-1/x^2} = o(x^a),\ \forall a \in \mathbb{R}$ per $x \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x^4) + \exp(-1/x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^4}{x^4} = 7,$$

   quindi si deduce che $f(x) \sim 7x^4$ per $x \to 0$, cioè $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$: l'affermazione è corretta.

4. *Dire se la seguente affermazione è corretta, specificandone il motivo:* $a_n = \sin(7/n)\exp(-n)$ *è una successione infinitesima di ordine* 1.

   Svolgimento. Devo considerate la successione

$$\frac{a_n}{1/n} = n\sin(7/n)\exp(-n) = \frac{n\sin(1/n)}{e^n} \sim \frac{7}{e^n}$$

   Poiché $\frac{a_n}{1/n} \sim \frac{7}{e^n}$ converge a 0, l'affermazione non è corretta. Si può invece affermare che $\sin(7/n)\exp(-n) = o(1/n)$.

Capitolo 3

Integrali

3.1 Funzioni integrali

1. Rispondere alle seguenti domande sulla funzione F definita da
$$F(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{1+t^5}{\ln(t)} dt.$$
   a. Spiegare perche' F è definita in 0.
   b. Senza calcolare l'integrale, che non puo' essere espresso tramite funzioni elementari, determinare dominio, crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo) di F.
   c. Determinare l'esistenza di asintoti per F.
   d. Disegnare il grafico di F.

2. Considerare la funzione
$$H(x) = \int_{1}^{1/x} \exp(-t^2) dt.$$
Si scriva H come composizione di una opportuna funzione integrale F e la funzione $x \mapsto 1/x$ e, usando tale scrittura, rispondere alle seguenti domande.
   (a) Spiegare perché il dominio di H è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (b) Verificare che H ha un asintoto orizzontale destro e sinistro (usare il cambiamento di variabile $y = 1/x$ nel limite)
   (c) Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$ e disegnarne il grafico, escludendo il comportamento nell'origine.
   (d) Dopo aver verificato che $0 < \exp(-t^2) < 1/t^2$ per $|t| > 1$, usare il cambiamento di variabile $y = 1/x$ nel limite e la monotonia dell'integrale per verificare che la funzione può essere estesa a 0 come funzione continua a destra. Verificare inoltre che tale funzione ha una discontinuità di salto.
   (e) Disegnare il grafico di H

3.2 Relazione fra integrale ed area

1. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x\cos(2x)$ e le rette $x = 0, \quad x = \frac{3\pi}{4}$.

2. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

3. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$

4. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x-1)^2$.

5. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x\cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$

6. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici

7. Disegnare e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa i grafici delle funzioni $y = \sqrt{2-x^2}$ e $y = 1$.

3.3 Integrali impropri

(a) Delle funzioni integrali considerate nei precedenti esercizi si determinino, ove possibile, gli eventuali asintoti orizzontali e verticali mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.

(b) Determinare quali dei seguenti integrali sono impropri e determinarne il carattere

$$\int_0^1 \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx, \quad \int_1^{-\infty} \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{\exp(x)-1}{(\cos(x)-1)}dx$$

(c) Determinare il carattere dei seguenti integrali impropri

$$\int_0^{\pm\infty} \frac{(\cos(x)-1)^2}{e^x}dx, \quad \int_0^{\pm\infty} \frac{xe^x}{x^{104}+x^3+7}dx, \quad \int_0^{\pm\infty} \frac{x^{203}}{e^x}dx, \int_0^{\infty} \frac{x^x}{x^{104}+71}dx$$

(d) Determinare quali dei seguenti integrali sono impropri e determinarne il carattere

$$\int_0^1 \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^{9/4}}dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{\sqrt[4]{1-\cos(x)}}{x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1-\cos(x)}}{x}dx$$

(e) Usando il teorema di De l'Hopital, si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} \int_0^x t\ln(|t|)dt$$

(f) Disegnare il grafico delle funzioni

$$t \mapsto \int_1^t \frac{e^{(x-2)}}{x^4}dx, \quad t \mapsto \int_{-5}^t \frac{e^{(x-2)}}{x^4}dx$$

determinando anche eventuali asintoti orizzontali e verticali.

(g) Disegnare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione

$$x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$$

determinando anche eventuali asintoti orizzontali e verticali.

3.4 Ricapitoazione

(a) Fare tutti gli esercizi sugli integrali dei compiti d'esame che si trovano sulle mie pagine web relative agli anni accademici precedenti.

(b) Disegnare il grafico di

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

i. Spiegare perche' f ammette primitive.

ii. Quante volte sono derivabili le sue primitive?

iii. Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.

iv. Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto, descrivendo al variare di $x \in \mathbb{R}$ il significato di $F(x)$ in termini di aree.

v. Indicata con $A(t)$ l'area della parte limitata di piano compresa fra il frafico di f, l'asse x e le rette $x = \pm t$, disegnare il grafico della funzione $x \to A(x)$ e calcolare $A(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) Studiare la funzione

$$t \mapsto \int_1^t \frac{(\cos(x) - 1)^2}{x^2} dx,$$

in particolare spiegare perché tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed ammette asintoti orizzontali (usare opportune limitazioni e la monotonia dell'integrale).

(d) Spiegare perchè la funzione $H : t \mapsto \int_0^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2} dx$ è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed usare il metodo di integrazione per sostituzione (o il significato geometrico dell'integrale) per dimostrare che tale funzione è pari. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} H(x)/x^n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$

(e) Studiare le due funzioni

$$t \mapsto \int_1^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx, \quad t \mapsto \int_{-2}^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx.$$

In particolare si cerchi di determininare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

(f) Disegnare il grafico di

$$t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

(g) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \ln(\cos(t))dt\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta, spiegarne il perche' e poi disegnare il grafico di f.
Il dominio di f è $(-\pi/2, \pi/2)$.
Il dominio di f è $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$.
Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
f è infinitesima per $x \to 0$.
f ha parte principale strettamente positiva per $x \to 0$.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n$ non esiste se $n > 3$.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n$ non esiste se n è un numero naturale pari maggiore di 3.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = -x^3/6$ se $n = 3$.
f è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$.
f è infinitesima senza ordine per $x \to 0$.
f è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$.
f è infinitesima di ordine 3 per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $-x^2/2$ per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $x^2/2$ per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $-x^3/3$ per $x \to 0$.
f è non cambia segno nel suo dominio.
f è dispari.
f è pari.
f ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.

(h) Sia G la funzione definita da

$$G(x) = \int_0^{\sin(x)} \exp(-t^2)dt\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
Il dominio di G è $(-\pi/2, \pi/2)$.
Il dominio di G è $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$.
Il dominio di G è $\mathbb{R}$.
G è dispari.
G è pari.
G è periodica.
$G'(x) = \exp(-x^2)$.
$G'(x) = -2x\exp(-x^2)\sin(x)$.
$G'(x) = \cos(x)\exp(-(\sin(x))^2)$.
$G'(x) = \cos(x)\exp(-x^2)$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^n$ non non esiste se $n > 3$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x = 1$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^3 = +\infty$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^2$ non esiste.
G ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.

(i)

$$G(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \ln(2 - t^2)dt\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
Il dominio di G è $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Il dominio di G è $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$.

Il dominio di G è $\mathbb{R}$.
G è dispari.
G è pari.
G è periodica.
$G'(x) = 2\ln(2 - x^4)$.
$G'(x) \equiv 0$.
$G'(x) = 4x\ln(2 - x^4)$.
$G'(x) = 2x\ln(2 - x^4)$.
$G'(x) = 4x\ln(2 - x^2)$.
G è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$.
G è infinitesima senza ordine per $x \to 0$.
G è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^n$ non esiste se $n > 1$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x = 1$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^3 = +\infty$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^2 = 2\ln(2)$.
G ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.
G ha un minimo locale nell'origine.
G ha un massimo locale nell'origine.
G ha massimo globale.
G ha due punti di minimo globale.
G ha due punti massimo globale.