Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica I
Registro delle lezioni del secondo semestre
A.A 2008/2009

Gianna Stefani

Indice

Capitolo 1

Introduzione

In questo file sono riportati gli argomenti delle lezioni del secondo semestre, cioè le lezioni sull'integrale di Riemann e sul calcolo differenziale e integrale delle funzioni reali di piu' variabili reali.

Il file è organizzato in maniera analoga a quello del semestre precedente.

1.1 Testo di riferimento

Contiene tutti gli argomenti del corso.

- Bertsch - Dal Passo - Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw-Hill.

Si può usare un qualsiasi testo di Analisi Matematica, usando il registro delle lezioni come indice degli argomenti.

Capitolo 2

Integrali

L'argomento viene trattato seguendo prevalentemente il testo di riferimento. Due sono i punti in cui l'esposizione si discosta leggermente.

- Relazione fra integrale ed area: viene dato maggior rilievo all'argomento, mediante definizioni precise e lemmi (senza dimostrazione). Sul testo l'argomento viene trattato in maniera piu' discorsiva.

- Teorema fondamentale del calcolo: viene enunciato sotto diverse ipotesi e se ne sottolineano le relative relazioni e quelle con l'enunciato del testo.

2.1 Settimana 23-27/02/09. Par. 9.1–9.4.

1. Il concetto di area di figure piane.
Definizione. Sia $\mathcal{C}$ una parte del piano limitata (cioè contenuta in un cerchio o poligono). $\mathcal{C}$ si dice misurabile secondo Riemann se l'estremo superiore dell'insieme delle aree dei poligoni contenuti in $\mathcal{C}$ coincide con l'estremo inferiore dell'insieme delle aree dei poligoni contenenti $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ è misurabile, l'estremo superiore delle aree dei poligoni contenuti (o equivalentemente l'estremo inferiore delle aree dei poligoni contenenti) si dice *area* di $\mathcal{C}$.

Lemma (senza dimostrazione). $\mathcal{C}$ è misurabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un poligono $\mathcal{P}$ che contiene $\mathcal{C}$ ed un poligono $\mathcal{Q}$ contenuto in $\mathcal{C}$ tali che l'area di $\mathcal{P}$ meno l'area di $\mathcal{Q}$ è minore o uguale di ϵ.

Osservazione. Il lemma precedente è una diretta conseguenza della definizione di estremo superiore e inferiore.

Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato.
Somma inferiore e superiore associata ad una partizione, disuguglianze legate alle partizioni.
Il caso delle funzioni positive: relazione fra somme superiori (inferiori) e area dei plurirettangoli circoscritti (iscritti) al grafico di una funzione.
Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato.
Esempi: funzioni costanti, funzione segno, funzione di Dirichlet.
Criterio di integrabilità basato sulla differenza fra somma inferiore e superiore associate ad una stessa partizione (senza dimostrazione). Relazione fra integrale e area per funzioni non negative:
Lemma. Se f è una funzione non negativa e integrabile su $[a, b]$, allora $\int_{[a,b]} f$ è l'area della parte di piano $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b)\ e\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, cioè della parte di piano delimitata dal grafico della funzione, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$.

2-3. Lemma (senza dimostrazione). L'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un **numero finito** di valori.
Notazione $\mathcal{R}(a, b)$
Classi di funzioni integrabili su un intervallo limitato (senza dimostrazione):

- funzioni limitate e monotone,
- funzioni continue sull'intervallo chiuso,
- funzioni limitate e continue eccetto un numero finito di punti, esempio: la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0, 1]$ estesa con qualunque valore a 0.

Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione):

- Linearità dell'integrale (proprietà *(i)* del teorema 9.5): l'insieme $\mathcal{R}(a, b)$ delle funzioni integrabili su $[a, b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f \in \mathcal{R}(a, b) \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ è lineare.
- Additività rispetto all'intervallo (proprietà *(iii)* del teorema 9.5).
- Monotonia (proprietà *(ii)* del teorema 9.5).
- Continuità (proprietà *(iv)* del teorema 9.5): definizione delle funzioni f^+, f^-, loro relazione con f e $|f|$; relazione fra integrale ed area per funzioni generiche tramite l'uguaglianza $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f^+ - \int_{[a,b]} f^-$.

Esempi grafici

4-5. Esercizio svolto. Integrabilità della funzione identità su $[0, 1]$.
Integrale orientato: definizione.
Esercizio (parzialmente svolto). Determinare quali delle precedenti proprietà dell'integrale di Riemann si estendono all'integrale orientato, in particolare si verifichi che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a, b, c \in I$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema della media integrale (teorema 9.6 del testo) con dimostrazione.
Funzioni integrali: definizione e loro continuità, con dimostrazione:
Lemma. Sia I un intervallo, $c \in I$ e sia $f \in \mathcal{R}(a, b)$ per ogni intervallo $[a, b] \subset I$. Allora la funzione $F_c : x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ è continua in I. Inoltre se $c, d \in I$ allora $F_c(x) = F_d(x) + \int_c^d f(t)dt$.
Dimostrazione. La prima parte è una applicazione del teorema della media integrale. Si veda anche la spiegazione a pag 233 del testo. La seconda parte segue dalla proprietà di additività dell'integrale orientato.

Teorema fondamentale del calcolo (teorema 9.7 del testo) (dimostrazione solo per funzioni continue).
Esercizio svolto. Estendere il teorema fondamentale del calcolo a funzioni f definite su un intervallo I con la proprietà che $f \in \mathcal{R}(a, b)$ per ogni intervallo $[a, b] \subset I$.

Teorema fondamentale del calcolo per le funzioni continue. Sia I un intervallo, sia $f \in C^0(I)$ e sia $x_0 \in I$. La funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ è una primitiva di f su I.

Dimostrazione. Vedi testo: è una semplificazione del teorema 9.7 del testo.

Esercizio svolto. Determinare il dominio e disegnare il grafico delle funzioni definite da

$$F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt \qquad G : x \mapsto \int_{-1}^x f(t)dt.$$

Esercizio (proposto). Usando la relazione fra integrale e area e la definizione di integrale orientato provare che $G(x) = F(-x)$.

Suggerimento. Osservare che $t \mapsto 1/t$ è dispari e distinguere i casi $x < -1$ e $x \in (-1, 0)$.

Esercizio svolto. Usando la definizione e le proprietà dell'integrale stabilire la relazione fra integrale orientato e area. Applicare questa relazione per risolvere il seguente problema: date

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

calcolare $\displaystyle\int_{-r}^r f_1(x)dx$ e $\displaystyle\int_{-r}^r f_2(x)dx$.

Esercizi proposti.

1. (Esercizio parzialmente svolto). Data la funzione $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, considerare la funzione $F : x \in [-r, r] \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Usando il teorema fondamentale del calcolo disegnare il grafico di F. Usando la relazione fra integrale e area calcolare $F(x)$. Detta $A(s)$ l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, l'asse y e la retta $x = s$, disegnare il grafico della funzione A, calcolarla e descrivere la relazione fra la funzione F e la funzione A.
   Risposta. Per $x \in [0, r]$, $F(x) = \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}$.

2. Data la funzione $f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, determinare il grafico della funzione F definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$. Determinare l'area della parte di piano delimitata dalla funzione f l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$. Inoltre, usando la relazione fra integrale ed area calcolare:
   (a) $\int_{-2}^2 f(x)dx$ R. $\pi/2$
   (b) $F(x)$ al variare di x nel dominio di F.
   Risposta. $\begin{cases} \frac{x^2+2x}{2} & \text{se } x \le 0 \\ \frac{\arccos(1-x)-(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2} & \text{se } x \in [0, 2] \end{cases}$

3. Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera. La funzione parte intera è definita da

$$x \mapsto n \text{ se } x \in [n, n + 1) \ n \in \mathbb{Z}.$$

2.2 Settimana 2-6/03/09. Par. 9.5–9.7.

6-9. Esercizi sulle funzioni integrali e la relazione fra integrale ed area.
Formula fondamentale del calcolo integrale (corollario 9.1 del testo).
Integrale per parti e sostituzione per l'integrale orientato.
Riguardare la ricerca delle primitive e l'integrale improprio sul registro delle lezioni del primo semestre e sul testo.
Esercizi (parzialmente svolti).

1. Calcolare i seguenti integrali orientati usando l'integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale di Riemann

$$\int_1^0 x(x-1)\sin(4\pi x)\,dx\,,\ \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx\,,\ \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

2. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si possono calcolare i seguenti integrali e calcolarli

$$\int_a^b \ln(x)\,dx\,,\ \int_a^b \arctan(x)\,dx$$

3. Calcolare $\int_a^b f(x)dx$, dove f è una delle seguenti funzioni e a, b sono coppie di numeri naturali scelte dallo studente (fra quelle possibili).

$$x \mapsto \frac{3x^3+x+1}{x+1}\,,\quad \frac{x}{hx^2+1}\,,\ h\in\mathbb{R}\,,\quad \frac{1}{hx^2+1}\,,\ h\in\mathbb{R}\,,$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}\,,\quad \frac{x+1}{x^2+x+1}\,,\quad \frac{1}{x^2+x+1}\,,\quad \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

Area della parte di piano compresa fra il grafico di due funzioni.
Lemma (senza dimostrazione) Siano $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ e sia $\mathcal{C}$ la parte del piano limitata dai grafici delle funzioni f, g e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$. Allora l'area di $\mathcal{C}$ è data da

$$\int_a^b |f-g|(x)dx$$

Esercizi svolti.

1. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \pi x/2$.

2. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

Studio di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt$, mediante la composizione di β con una funzione integrale: dominio e derivata.
Esercizio svolto. Disegnare, per quanto possibile, il grafico della funzione

$$x \mapsto \int_1^{1/x^2} \ln(t)dt.$$

Il grafico è stato disegnato senza analizzare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.
Esercizio svolto. Usando il cambiamento di variabile $y = 1/x^2$ e l'integrazione per parti, determinare l'esistenza di di asintoti orizzontali e verticali per la precedente funzione

Cenni sullo studio di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$, vedi l'esempio 9.6 del testo.

Esercizio proposto. Delle funzioni $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^{x} \arcsin(t)\,dt$ determinare dominio e derivata.

9-10 Integrali impropri e integrabilità in senso improprio come limiti di funzioni integrali.
Integrale impropri degli infiniti e infinitesimi di riferimento $1/x^r$ e loro interpretazione geometrica in termini di aree.
Definizione. Sia $I = (\alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, un intervallo e sia $f \in \mathcal{R}(a, b)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $c \in I$. f si dice integrabile in senso improprio su I se è integrabile in senso improprio su $(\alpha, c]$ e su $[c, \beta)$. Inoltre

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Assoluta integrabilità in senso improprio.
Criterio del confronto (per funzioni positive).
Esercizi fatti o proposti

1. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|^\beta}{x^2} dx$$

2. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx.$$

3. Integrabilità impropria della funzione di Gauss (gaussiana) $x \mapsto e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$.

4. Studio della funzione dell'errore

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

5. Disegnare il grafico della funzione

$$x \mapsto \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^x \exp\left(-\frac{(t - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dt \quad \sigma > 0 \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

   In particolare se ne calcoli il massimo e gli asintoti orizzontali, sapendo che

$$\int_0^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

   Suggerimento. Si usi la definizione di integrale improprio e il cambiamento di variabile $y = \frac{(t-x_0)}{\sqrt{2}\sigma}$

6. Fare tutti gli eserci del testo sugli integrali (relativi alla parte svolta per quanto riguarda i metodi di integrazione)

2.3 Mercoledí 11/03/09. Par. 9.7

11–13. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni positive: criterio del confronto asintotico, criterio del confronto per funzioni $f(x) = o(g(x))$.
Esercizi di ricapitolazione.

Capitolo 3

Numeri complessi

3.1 Venerdí 13/03/09. Par. 1.3, 10.3

14–15. Numeri complessi $\mathbb{C}$: rappresentazione cartesiana dei numeri complessi: parte reale, parte immaginaria, coniugato, somma, prodotto, inverso, modulo, argomenti (l'argomento principale sarà scelto in $[0, 2\pi)$). Coordinate polari nel piano (pg.289 del testo). Rappresentazione trigonometrica e rappresentazione esponenziale, teorema di de Moivre (senza dimostrazione). Potenze e radici. Radici dell'unità. Radici di un polinomio di secondo grado.

Guardare sul testo: Teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione) e gli esercizi sui numeri complessi.

Capitolo 4

Funzioni di più variabili

Per questa parte del corso verra' seguita l'impostazione del libro e saranno segnalate le parti da svolgere. Inoltre i teoremi citati sono da intendersi senza dimostrazione, se non esplicitamente detto.

Lo studente che lo preferisca può seguire ogni altra impostazione, purché coerente.

4.1 Settimana 16–21/03/09. Par. 10.1, 10.1.1.

Le lezioni del 18/03/09 non sono state tenute per adesione allo sciopero.

16–17, venerdí 20/03. Concetti base in $\mathbb{R}^n$: modulo; distanza; intorni sferici $B_\epsilon(P)$; punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione; insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi limitati
Esercizi parzialmente svolti: esempi 10.2 e 10.3 del testo, esercizi 10.1 e 10.2.
Funzioni coordinate, curve coordinate.
Grafici di funzioni reali di n variabili reali, convenzione sul dominio, equazioni.
Curve e superfici di livello, esempi dalla geometria: equazioni parametriche e cartesiane di retta e piano.
L'elemento ∞ ed i suoi intorni.
Esercizio proposto: esercizio 10.3 del testo.

4.2 Settimana 23–28/03/09. Par. 10.2, 10.2.3, 10.3, 11.1

16, martedì 24/03. Esercizi di preparazione alla seconda prova intercorso.

17, martedì 24/03. Continuità di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$: definizione, continuità delle funzioni combinate (pg. 278 del testo), continuità delle funzioni coordinate, esempi di funzioni continue.

18–20, mercoledì 25/03. Curve parametrizzate.
Definizione di "definitivamente per $x \to \alpha \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$
Limiti di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$: definizione, limiti delle funzioni combinate.
Definizione di insieme connesso per archi (definizione 10.9 del testo) e di insieme compatto (cioè chiuso e limitato, pg. 279 inizio paragrafo 10.2.2 del testo).
Teoremi fondamentali sulle funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$: esistenza di massimo e minimo per funzioni continue su un compatto (teorema di Weierstrass, 10.2 del testo), teorema degli zeri e dei valori intermedi per funzioni continue su insiemi connessi per archi (pg.284 ed esercizi 10.10 b) e c) del testo).
Esempi di calcolo di limiti mediante le coordinate polari.

21, giovedì 26/03. Complementi ed esempi su limiti e continuità: riduzione dello studio di limiti e continuità alle funzioni a valori scalari (formula (10.2) a pg.277 del testo)), condizione necessaria per l'esistesta del limite tramite la composizione con curve parametrizzate (esempi 10.15 e 10.16 del testo), studio del segno delle funzioni continue. Definizione di insieme convesso (definizione 11.6, pg.307 del testo) ed esempi.
Esercizi proposti (parzialmente svolti): esempio 10.5, esempi 10.7, 10.8, 10.9, esercizi 10.7, 10.8, esempi 10.10, 10.11, esercizi 10.9, 10.10, esempi 10.13, 10.14, esercizio 10.11, esercizio 10.12.

22, giovedì 26/03. Derivate parziali di funzioni a valori scalari: definizione, definizione del gradiente, esempi.

4.3 Settimana 30/03–4/04/09. Par. 11.1, 11.2.

23–25, martedì 31/03. Esercizi di preparazione alla prova intercorso e su limiti e continuità delle funzioni di più variabili.

26, mercoledí 1/04. Derivate direzionali.
Linearità del gradiente, gradiente del prodotto e del rapporto, gradiente della composizione, regola della catena. Esempi.
Differenziabilità delle funzioni a valori scalari: prenderemo per definizione la condizione necessaria e sufficiente (11.16) a pg.296 del testo. Differenziabilità e derivate direzionali.

mercoledí 1/04/09 ore 1:30-15:45. Test della seconda prova intercorso

27–28, venerdí 3/04. Differenziabilità: funzioni $C^1(X)$, teorema del differenziale totale (corollario 11.1, pg.299 del testo), funzioni combinate, composizione con le curve, piano tangente al grafico, direzione di massima crescita, estensione del teorema di Lagrange (teorema 11.4, pg. 300 del testo) con dimostrazione.
Esercizi proposti (parzialmente svolti).

1. Esempi 11.1, 11.2, pg.292.
2. Esercizi 11.1, 11.2, pg. 293-294.
3. Esempi 11.4, 11.5, pg.294.
4. Delle funzioni considerate negli esercizi ed esempi precedenti, stabilire l'insieme in cui sono differenziabili.
5. Esempi 11.6, 11.7
6. Esercizi 11.3, 11.4, 11.5, 11.6

4.4 Settimana 14–18/04/09. Par. 11.3, 11.4, 11.6.

29, mercoledí 15/04. Esercizi: correzione test intercorso e differenziabilità.

30-31, mercoledí 15/04/09. Derivate seconde, teorema di Schwartz, matrice hessiana, derivate di odine superiore, polinomio di Taylor del secondo ordine, cenni ai polinomi di ordine superiore.

32–33, venerdí 17/04. Estremi liberi: condizione necessaria del primo ordine con dimostrazione (gradiente nullo) per funzioni di classe C^1, condizione necessaria del secondo

ordine (segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana) per funzioni di classe C^2, con dimostrazione.
Definizione di forma quadratica e studio del suo segno (primi elementi).

4.5 Settimana 20-24/04. Par. 11.5, 11.6.

mercoledí 24/04. Prova scritta intercorso per chi ha passato il test, esercitazione scritta per gli altri.

34, mercoledí 24/04/09. Segno di una forma quadratica Q mediante gli autovalori.
Forme Quadratiche (vedi anche appendice di algebra lineare on line ed il testo di geometria). Sia S una matrice simmetrica $n \times n$, definiamo la funzione, detta *forma quadratica associata ad* S,

$$Q : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \sim M_{n,1} \mapsto \mathbf{x}^T S \mathbf{x}$$

dove $\mathbf{x}$ è scritto come un vettore colonna.
Lemma. Siano $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ gli autovalori di S, se $(v_1, \ldots, v_n)$ sono le componenti di $\mathbf{x}$ in una base ortonormale di autovettori associati a $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, allora

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n}\}$ una base ortonormale di autovettori associata a $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Consideriamo la matrice $n \times n$ data da $(\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n})$, si ha

$$UU^T = U^T U = Id \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{u_i} = U\mathbf{v}.$$

Quindi

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T U^T S U \mathbf{v}.$$

Per provare il risultato basta far vedere che $U^T SU$ è una matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale: verificarlo per esercizio. □

La forma quadratica Q (o equivalentemente la matrice S) si dice *semidefinita positiva (negativa)* se $Q \geq 0$ (≤ 0).

La forma quadratica Q (o equivalentemente la matrice S) si dice *definita positiva (negativa)* se $Q(\mathbf{x}) > 0$ (< 0), $\forall \mathbf{x} \neq 0$.

La forma quadratica Q (o equivalentemente la matrice S) si dice *non definita* se Q cambia segno.

Lemma. Q è semidefinita positiva (negativa) se e solo se gli autovalori sono non negativi (non positivi). Q è definita positiva (negativa) se e solo se gli autovalori sono positivi (negativi). Q è non definita se e solo se ci sono autovalori positivi e negativi.

Dimostrazione. Per esercizio, usare il lemma precedente.

35–36, venerdí 24/04/09. Riepilogo sugli estremi liberi (teoremi 11.14 e 11.15).
Il caso $n = 2$. Esercizi (fatti o proposti):

1. Paraboloide ellittico e paraboloide iperbolico o a sella (grafici di funzione di due variabili)

$$z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}, \quad z = xy.$$

   Studiare l'esistenza di estremi liberi e i grafici.

2. Esercizio 11.11 del testo.

3. Fare tutti gli esempi e gli esercizi del testo sull'argomento.

4.6 Settimana 27/04–02/05/09. Par. 11.7, 13.1.1.

37–39, mercoledí 29/04/09. Differenziabilità di funzioni a valori vettoriali, matrice Jacobiana. Teorema di inversione locale e cambiamenti di coordinate (o di variabili). Esempi: coordinate polari nel piano e cilindriche nello spazio (vedi par. 14.4.2 pag. 389 del testo).
Derivata della composizione e matrice jacobiana della funzione composta.
Esercizi (fatti o proposti):

1. Esempi 11.18 (caso generale dei paraboloidi ellittici e iperbolici, vedi anche esempio 11.15 e la figura 11.7) e 11.19.

2. Fare tutti gli esempi e gli esercizi del testo sull'argomento.

4.7 Settimana 4–8/05/09. Par. 13.1, 13.1.2, 13.1.3, 13.1.4.

40–42, mercoledí 6/05/09. Regola pratica della catena: **esercizio**. Date $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definite rispettivamente da

$$\begin{aligned} y_i = &\ f_i(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ z = &\ g(y_1, \dots, y_m) \quad , \end{aligned}$$

si vede facilmente che $h \equiv g \circ f$ è definita da

$$z = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Verificare che il teorema sulla matrice jacobiana della composizione porta al seguente risultato

$$\partial_{x_j} h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \partial_{y_i} g(f(\mathbf{x}))\partial_{x_j} f_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \partial_{y_i} z(\mathbf{y})\partial_{x_j} y_i(\mathbf{x}).$$

La seconda scrittura, è una convenzione usata nelle applicazioni efficace come regola mnemonica. La regola della catena si ottiene semplicemente scrivendo, mediante la sommatoria, il prodotto righe per colonne fra matrici; si ponga l'attenzione su quali indici sono uguali e su quali indici sono ripetuti.
Esercizi.

1. Verificare la regola della catena per $f \circ \gamma$, dove f e γ sono rispettivamente definite da
$$w = x^2 - y^2 - z^2 \,, \qquad \begin{cases} x = & \cos(t) \\ y = & \sin(t) \\ z = & t \end{cases}$$

2. Sia f la funzione definita da
$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \,, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (a) Usando le coordinate polari, verificare che f non è continua nell'origine

(b) Verificare, usando la definizione, che le derivate parziali di f esistono e sono nulle nell'origine

(c) Calcolare le derivate parziali di f e dedurne che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) Considerare la trasformazione (coordinate polari) Ψ definita da

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\varphi) \\ y = & \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$

e calcolare la matrice jacobiana di $f \circ \Psi$ sia direttamente, sia col prodotto delle matrici jacobiane, sia con la regola della catena. Porre attenzione a come è definita $f \circ \Psi$ e all'insieme in cui è differenziabile.

Funzioni implicite: caso lineare, teorema della funzione implicita o del Dini (teorema 13.2 solo con m=1). Curve di livello, loro rette tangenti e approssimazione locale.
Approssimazione locale delle curve di livello. Sia f una funzione di due variabili di classe $C^k(X)$, X aperto, e sia $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in X$. Se $\partial_y f(P_0) \neq 0$, è definita implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ mediante

$$f(x, \varphi(x)) \quad \equiv 0 \tag{4.1}$$

$$\varphi(x_0) \quad = y_0 \tag{4.2}$$

Per ottenere la derivata della funzione implicita si deriva, usando la regola della catena, l'equazione (4.1), ottenendo

$$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0. \tag{4.3}$$

Dall'equazione (4.3), usando (4.2) si ottiene

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}. \tag{4.4}$$

Derivando l'equazione (4.3) si ottiene

$$\partial^2_{xx} f(x, \varphi(x)) + 2\partial^2_{xy} f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \partial^2_{yy} f(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi''(x) \equiv 0.$$

Da questa, usando (4.2) e (4.4), si ottiene

$$\varphi''(x_0) = -\frac{(1, \varphi'(x_0))H_f(x_0, y_o)\binom{1}{\varphi'(x_0)}}{\partial_y f(x_0, y_0)}.$$

Continuando si possono calcolare le derivate successive e quindi l'approssimazione di Taylor di ordine k della funzione φ.

Esercizio. Ripetere il ragionamento precedente per la funzione implicita $x = \psi(y)$ che si può definire nel caso che $\partial_x f(P_0) \neq 0$.

Esercizi

1. Fare tutti gli esercizi e gli esempi del paragrafo 13.1.3. Inoltre, delle curve di livello considerate, determinare l'approssimazione del secondo ordine e dedurne l'andamento locale del grafico.

2. Studiare le curve di livello in vari punti delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (x+3)(y-1), \quad \ln(xy) - 2x + y$$

Superfici di livello, loro piani tangenti e approssimazione locale.
Esempio: altre quadriche riferite agli assi (superfici di livello di funzioni di tre variabili).

1. Sfera e ellissoide (matrice hessiana definita positiva).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Iperboloide a una falda e iperboloide a due falde (matrice hessiana non definita).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Esercizi.

1. **Coordinate polari nello spazio** (vedi par. 14.4.2 pag. 390 del testo). studiare l'invertibilità della trasformazione

$$\begin{cases} x = & x_0 + r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = & y_0 + r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = & z_0 + r\cos(\theta) \end{cases}$$

2. Calcolo della direzione di massima crescita (decrescita) in un punto critico.

43–44, venerdí 8/05/09. Par. 12.1, 13.2, 13.3. Curve chiuse, semplici, regolari, regolari a tratti. Punto regolare di una curva.
Esempi: $\gamma(t) = (t^2, t\sin(t))$, (t^2, t^3) , $(\sin(t), \cos(t), t)$.
Estremi vincolati di funzioni di due variabili: il metodo delle curve di livello e del moltiplicatore di Lagrange. Ricerca degli estremi di una funzione di due variabili su insiemi compatti.

Capitolo 5

Equazioni differenziali

Le lezioni sulle equazioni differenziali saranno tenute in mia assenza dal Prof. Spadini con la collaborazione della Dott. Chittaro nelle settimane 11–22/05/09.

5.1 Settimana 11–17/05/09

44-45, mercoledi 13/05/09. (M. Spadini) La nozione di equazione differenziale ordinaria e nozione di soluzione. Esempi semplici, ricerca di una primitiva. Equazioni in forma normale e non. Il problema di Cauchy per equazioni del primo ordine (caso vettoriale), soluzione di un problema di Cauchy. Giustificazione: sistemi di equazioni, equazioni del secondo ordine come sistema del primo ordine. Il teorema di Cauchy (forma vettoriale). Esempio di ricerca di una soluzione di una equazione differenziale lineare (scalare).
46-47, mercoledi 13/05/09. (F. Chittaro) Equazioni lineari del tipo $x' = a(t)x$, $a(t)$ continua; formula generale della soluzione del problema di Cauchy associato ad equazioni lineari (con dimostrazione).

Equazioni affini del tipo $x' = a(t)x + b(t)$, $a(t)$ e $b(t)$ continue. Enunciato della formula generale della soluzione del problenma di Cauchy. Metodi ad hoc per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Equazioni a variabili separabili $x' = h(x)g(t)$, h e g continue. Formula generale di risoluzione (con dimostrazione) e determinazione dell'intervallo massimale.

Esercizi: problemi di Cauchy associati alle equazioni

$$\begin{aligned}
x' &= 4x \\
x' &= x = 3t^3 + 4t^2 + 1 \\
x' &= x + \sin t \\
x' &= 3x + \exp(2t) \\
x' &= tx(2 - x), \quad x(0) = 1
\end{aligned}$$

48-49, venerdi 15/05/09. (M. Spadini) Sistemi di n equazioni differenziali lineari. L'equazione differenziale come problema lineare. Funzioni (a valori in $\mathbb{R}^n$) linearmente indipendenti. L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione n, base dello spazio delle soluzioni. Equazioni lineari non omogenee, struttura delle soluzioni. Caso $n = 1$, formula risolutiva. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine scalari e loro riduzione ad un sistema del primo ordine. Funzioni (a valori in $\mathbb{R}$) linearmente indipendenti, determinante wronskiano (cenno). Struttura dell'insieme delle soluzioni.

5.2 Settimana 18–23/05/09

50-51, mercoledi 20/05/09. (M. Spadini) Equazioni differenziali lineari (scalari) del secondo ordine; richiami su spazio delle soluzioni e determinante wronskiano. Determinazione di una base per lo spazio delle soluzioni nel caso di coefficienti costanti. Alcuni esempi. Caso non omogeneo: struttura dell'insieme delle soluzioni.
52-53, mercoledi 20/05/09. (F. Chittaro) Riepilogo del teorema di esistenza e unicità. Controesempio: il problema di Cauchy $x' = \sqrt[3]{x}$, $x(0) = 0$.

L'intervallo massimale e le equazioni a vaiabili separabili : $x' = x^2$, soluzioni a seconda che $x(0) = 0$, $x(0) > 0$, $x(0) < 0$.

Problema di Cauchy $x'' + 9x = -\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$

Equazioni $x'' + 9x = -\sin 3t$ e $x'' + 2x' - 3x = \exp(lx)$ nei casi $l \neq -3, 1$ e $l = 1$. Fare per casa $x'' + x = t^3 - t + 1$ con suggerimento: cercare la soluzione particolare del tipo polinomiale, di grado 3.

Problemi di cauchy $x' = 1/(1 - t^2)x$, $x(0) = 2$ e $x' = (1 + x^2)t$, $x(0) = 0$.

Notare che se y_1 è soluzione particolare di $y''+ay'+b = f_1(t)$ e y_2 è soluzione particolare di $y''+ay'+b = f_2(t)$, allora (y_1+y_2) e' soluzione particolare di $y''+ay'+b = f_1(t)+f_2(t)$
54-55, venerdi 22/05/09. (M. Spadini) Metodo di variazione delle costanti arbitrarie per equazioni differenziali lineari non omogenee del secondo ordine. Esercizi ed esempi:

$$\ddot{x} + x = \frac{1}{\cos t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ddot{x} - x = \frac{1}{x}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Altri esercizi di riepilogo. Alcuni problemi non di Cauchy e difficoltà che possono nascere.

Capitolo 6

Complementi ed esercizi

Nelle ultime due settimane del corso (25/05/09–05/06/09) verranno svolti complementi ed esercizi sugli argomenti fin qui svolti. Si danno di seguito alcuni esempi di esercizi.

6.1 Esercizi sulle funzioni di più variabili

1. Considerare le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definite da

$$f(x, y) = 2y\cos(xy) - x\,, \quad 2\sin(2x + y) - x\,.$$

   a. Determinare le derivate parziali.

   b. Determinare il piano tangente al grafico delle funzione nel punto $(0, 0, 0)$.

2. Considerare le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definite da

$$f(x, y) = e^{xy} - \cos(x^2) - y^2 + y\sin(x) + 1\,, \quad xe^{xy} - \cos(x) + y^2 - \sin(x) + 1.$$

   a. Determinarne il polinomio di Taylor di grado 2 centrato nell'origine.

   b. Dedurre dal precedente punto se l'origine e' un punto stazionario. In caso affermativo dedurre, se possibile, se sia un punto di sella o un minimo o massimo locale.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 - y^2$

   a. Disegnare le linee di livello di f.

   b. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolata a $x^2/4 + y^2/9 = 1$ e calcolarli.

   c. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f vincolata all'insieme $x^2/4 + y^2/9 \leq 1$ e calcolarli. Illustrare quanto fatto con un disegno.

   d. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (1, 1)$.

   e. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (e^t, t)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1, 1)$.

   f. Calcolare il piano tangente al grafico $z = f(x, y)$ nel punto $P = (1, -2, -3)$.

   g. In quali punti di quali linee di livello di f non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a. Determinare l'insieme in cui f e' differenziabile.

b. Discutere la limitatezza e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).

c. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (1, 1)$.

d. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, t^2)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1, 1)$.

e. Calcolare la retta tangente alla curva di livello $f(x, y) = 0$ nel punto $P = (1, 1)$.

f. Enunciare il teorema della funzione implicita per la curva di livello $f(x, y) = 0$ nel punto $P = (1, 1)$ e dedurne il grafico vicino a $P = (1, 1)$.

g. Quali sono i punti di $f(x, y) = 0$ in cui non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

a. Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$ e dare la definizione di $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$.

b. Discutere l'esistenza di massimo e minimo della funzione nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2 e nel cerchio aperto.

c. Discutere la limitatezza di f e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).

d. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (0, 0)$ e il piano tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, -1, 0)$.

e. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (1 - t, 1 - t^2)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (0, 0)$.

f. Calcolare il polinomio di Taylor del secondo ordine di f centrato nell'origine.

g. Enunciare le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti affinche' un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sia un massimo o un minimo locale per f. Determinare i punti stazionari della f e studiarli.

6.2 Esercizi sulle equazioni differenziali

1. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} + 9x = -\sin(t)$$

e che al tempo 0 lo spostamento valga $x(0) = 0$ e la velocità valga $\dot{x}(0) = -1$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo

b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione

c. **Facoltativo:** si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

2. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} + 9x = -\sin(3\,t)$$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e della posizione e velocità al tempo 0

b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione

c. **Facoltativo:** si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

3. **Teorico** Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine sulla semiretta $(0,+\infty)$

$$x^2y'' + 2xy' - \frac{15}{4}y = 0.$$

a. Verificare che $y(x) = x^{3/2}$ e $y = x^{-5/2}$ sono soluzioni della precedente equazione

b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione

c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2$$

d. Discutere l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione con le condizioni

$$y(1) = 1, \qquad y(10) = 1$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + y = -2\tan(x).$$

a. Verificare se

$$y = 2\cos(x)\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

è soluzioni della precedente equazione ed in quale intervallo (quali intervalli)

b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$.

c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -3$$

d. **Facoltativo:** discutere l'esistenza e l'unicità, al variare di $a \in \mathbb{R}$ della soluzione dell'equazione con le condizioni

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = a$$

5. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 3\frac{d}{dx}y(x) + 3y(x) = 0.$$

a. Determinare la soluzione generale della precedente equazione

b. Determinare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

c. **Facoltativo:** per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

tende a 0 per $x \mapsto +\infty$?

6. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 4\frac{d}{dx}y(x) + y(x) = \sin(3x). \tag{6.1}$$

   a. Determinare la soluzione generale dell' equazione omogenea associata
   b. Determinare la soluzione generale dell' equazione non omogenea
   c. Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

   d. **Facoltativo:** per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione delle equazioni (omogenea e non omogenea) con condizioni iniziali

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

   tende a $-\infty$ per $x \mapsto +\infty$?

7. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$$

   e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 3$

   a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo
   b. Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
   c. **Facoltativo:** determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a

$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$

   decresce senza oscillare.

8. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$$

   e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 2$

   (a) Determinare lo spostamento in funzione del tempo
   (b) Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
   (c) **Facoltativo:** determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a

$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$

   decresce senza oscillare.