Analisi Matematica I - Ingegneria Civile
Prova scritta del 21/07/09

1. Sia f la funzione definita da $f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x+3 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$, e sia F definita da

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

   (a) Senza calcolare l'integrale disegnare il grafico di F, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.

   (b) Calcolare $F(x)$ al variare di x nel dominio di F, descrivendo il suo significato in termini di aree.

   (c) Indicata con $A(t)$ l'area della parte limitata di piano compresa fra il frafico di f, l'asse x e le rette $x = \pm t$, disegnare il grafico della funzione $x \to A(x)$ e calcolare $A(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   (d) La funzione f ammette primitive su $\mathbb{R}$? Se si determinarle.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(4x^2 - y^2)$.

   a. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$$

   b. Determinare gli eventuali massimi e minimi locali.

   c. In quali punti di quali linee di livello di f non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

   d. Determinare, se esiste, la tangente in $P \equiv (0, 1)$ alla linea di livello $f(x, y) = f(P)$.

   e. Determinare, se esiste, la tangente in $P \equiv (1, 1)$ alla linea di livello $f(x, y) = f(P)$.

   Determinare, se esiste, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ la soluzione ϕ_h del seguente problema

3. Determinare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ la soluzione ϕ_h del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2h \end{cases}$$

   Inoltre

   (a) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il grafico di ϕ_h ammette asintoti orizzontali o verticali.

   (b) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\phi_h(x_0) = 0$

   (c) Disegnare il grafico di ϕ_h al variare di $h \in \mathbb{R}$

4. Determinare, se esiste, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ la soluzione ϕ_h del seguente problema

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{h}{e^3} \end{cases}$$

   Inoltre

(a) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il grafico di ϕ_h ammette asintoti orizzontali o verticali.

(b) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\phi_h(x_0) = 0$

(c) Disegnare il grafico di ϕ_h al variare di $h \in \mathbb{R}$

5. Disegnare il sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1\,,\ \ |x + y| \leq 1\}$$

Inoltre determinare l'immagine della funzione $f : D \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y) = 3x + 2y$