Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Lezioni del secondo periodo - A.A. 2007/2008, prof. G. Stefani
21/01/08 - 21/03/08

Testi consigliati:
M.Bertsch, R.Dal Passo, L.Giacomelli - Analisi Matematica - McGrow-Hill editore
S.Salsa, A.Squellati - Esercizi di Matematica, vol.I - Zanichelli editore

1 21-26/01. Cap.9.1,2

Mercoledi' 23/1
1. Il concetto di area di figure piane. Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato, partizioni piu' fini, partizione unione di due partizioni, somma inferiore e superiore legate ad una partizione, plurirettangoli iscritti e circoscritti, disuguglianze legate alle partizioni.
2. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato. Relazione fra integrale e area. Esempi: funzioni costanti, funzione di Dirichlet.
Giovedi' 24/1
3. Criterio di integrabilità basato sulla differenza fra somma inferiore e superiore associate ad una stessa partizione (senza dimostrazione). Esempio: integrabilità delle funzioni lineari e loro integrale. Classi di funzioni integrabili sull'intervallo $[a, b]$ (senza dimostrazione): $C([a, b])$, funzioni monotone su $[a, b]$, funzioni limitate su $[a, b]$ e continue tranne un insieme finito di punti. Esempio: la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0, 1]$ estesa con qualunque valore a 0 (senza dimostrazione). Risultato senza dimostrazione: l'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un **numero finito** di valori. Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione):

- Linearità dell'integrale: l'insieme $\mathcal{R}(a, b)$ delle funzioni integrabili su $[a, b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f \in \mathcal{R}(a, b) \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ è lineare.
- Additività rispetto all'intervallo.
- Monotonia
- Integrale di f^+, f^-, $|f|$

4. Integrale orientato: definizione e relazione fra integrale e area. **Per esercizio:** determinare quali delle precedenti proprietà dell'integrale di Riemann si estendono all'integrale orientato, in particolare si verifichi che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a, b, c \in I$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Esempi: date $f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$, calcolare $\int_{-r}^r f_1(x)dx$ e $\int_{-r}^r f_2(x)dx$.

2 28/1-2/2. Cap.9.3,4

Mercoledi' 30/1
5. Funzioni integrali: definizione e loro continuità e lipschitzianità (rapporto incrementale limitato), con dimostrazione della continuità. Dimostrazione della lischitzianità per

esercizio.
Esercizio (parzialmente svolto). Date la funzione $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, considerare la funzione $F : x \in [-r, r] \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Usando la relazione fra integrale e area, disegnare un grafico approssimato determinando dominio, crescenza e decrescenza e calcolare $F(x)$. Detta $A(s)$ l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, l'asse y e la retta $x = s$, disegnare il grafico della funzione A e calcolarla. R. per $x \in [0, r]$, $F(x) = \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}$.

Esercizi proposti. Data la funzione $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$,

1. $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ R. $\pi/2$
2. $\int_{-2}^{x} f(t)dt$ al variare di $x \in [-2, 2]$ R. $\begin{cases} \frac{x^2+2x}{2} & \text{se } x \in [-2, 0] \\ \frac{\arccos(1-x)-(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$
3. determinare l'area della parte di piano delimitata dalla funzione f_2 l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$.

6. Teorema della media integrale (teorema 9.6 del testo), con dimostrazione. Teorema fondamentale del calcolo (teorema 9.7 del testo) e sua dimostrazione nel caso di funzioni continue. Applicazione e formulazione del teorema fondamentale del calcolo al caso di funzioni definite su un intervallo I qualsiasi e integrabili su ogni intervallo limitato e chiuso contenuto in I. Più precisamente indicato con $\mathcal{R}^*(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni definite su I e integrabili su ogni suo sottointervallo limitato e chiuso, si ha che per ogni $f \in \mathcal{R}^*(I)$ ed ogni $c \in I$, la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ è continua in I e derivabile sull'insieme $D = \{x \in I : f \text{ è continua in } x\}$, inoltre per ogni $x \in D$, $F'(x) = f(x)$.
Giovedi' 31/1
7. Somme integrali di Riemann. **Esercizi (svolti o proposti)**

- Disegnare il grafico delle funzioni $x \mapsto \int_c^x \frac{1}{t}dt$ con $c = -1, 1, -2, 2$ e le loro relazioni.
- Date le funzioni $f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ e $f_2 : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, disegnare il grafico delle funzioni $F^i_{x_0} : x \mapsto \int_{x_0}^x f_i(t)\,dt$, $i = 1, 2$, dove x_0 prende diversi opportuni valori, ad esempio $x_0 = 0, -r, 1, -1, -2, 2, r$ se ammissibili.
- Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera.

8. Definizione di primitiva di una funzione f su un intervallo I, struttura dell'insieme delle primitive (teorema 9.8 del testo) con dimostrazione. Formula fondamentale del calcolo integrale (corollario 9.1 del testo), con dimostrazione. Integrale indefinito, esempi. **Leggere la tabella di derivazione delle funzioni elementari per ricavarne le primitive di alcune funzioni elementari**.

3 4-9/2. Cap. 9.5,6

Mercoledi' 6/02
9. Integrazione per parti. Esempi.
10. Integrazione per sostituzione. Esempi.
Giovedi' 7/02
11,12, lezioni tenute dal Dott.Borsi Integrazione delle funzioni razionali. Per il dettaglio si veda la pagina degli esercizi.

4 11-16/2. Cap.9.3,6

Mercoledi' 13/02
13 Area della parte di piano compresa fra il grafico di due funzioni. Esempi ed esercizi: area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \pi x/2$, area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.
14 Esercizi.

$$\int_0^1 x(x-1)\sin(4\pi x)\,dx\,,\ \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx\,,\ \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx\,,\ \int_a^b \ln(x)\,dx\,,\ \int_a^b \arctan(x)\,dx$$

$$\int \frac{3x^3+x+1}{x+1}\,dx\,, \int \frac{x}{ax^2+1}\,dx\,,\ \int \frac{1}{ax^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx\,, \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx\,, \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,, \int \frac{x+3}{(x+1)^2}\,dx$$

Giovedi' 14/2
15. Derivata di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$. Esercizi: delle funzioni $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^{x} \arcsin(t)\,dt$ determinare dominio e derivata.
16. Esempi di sostituzioni. Esercizi

5 18-23/2. Cap.9.7

Mercoledi' 20/02
17,18. Esercizi.
Giovedi' 21/02
19,20. Integrabilità in senso improprio sulla semiretta e su un intervallo: definizione ed esempi. Integrale improprio degli infiniti e infinitesimi di riferimento $1/x^r$. Criterio del confronto per gli integrali impropri. Esercizio.

6 25/2-1/3. Cap.9.7

Mercoledi' 27/02
21,22. Criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri. Assoluta integrabilità in senso improprio. Esempi ed esercizi fatti o proposti.

1. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|^\beta}{x^2}$$
2. Dimostrare che la funzione $x \mapsto \sin(x)/x$ è integrabile ma non assolutamente integrabile in senso improprio sulla semiretta $[0,\infty)$

Giovedi' 28/02
23. Criterio del confronto per funzioni $f(x) = o(g(x))$. Esercizio: studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}.$$

Serie numeriche e integrali impropri. Criterio integrale per le serie a termini positivi. Esempio: carattere della serie armonica generalizzata.
24. Complementi sulle serie: criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi, esercizio: studiare il carattere delle serie

$$\sum_{i\geq 1} \sin(1/n^2)\sqrt{n+n^2}, \quad \sum_{i\geq 1} \sin(1/n^2)\sqrt{n+\sqrt{n}}$$

Esercizio parzialmente svolto: studiare la funzione integrale

$$F : x \mapsto \int_{-2}^{x} (1+1/t)^t dt$$

Indicazioni per lo svolgimento del precedente esercizio

1. F è definita in $(-\infty, -1)$, quindi serve lo studio della funzione $f : x \mapsto (x+1/x)^x$ sulla semiretta $(-\infty, -1)$. Gli studenti sono invitati a ripetere i calcoli sulla semiretta $(0, \infty)$ e studiare la funzione integrale $x \mapsto \int_2^x (1+1/t)^t dt$.

2. Equivalenza asintotica per $x \to -\infty$.

$$f(x) = e^{x\ln(1+1/x)} = e^{1-1/(2x)+o(1/x)} = e(1 - 1/(2x) + o(1/x))$$

3. Equivalenza asintotica per $x \to -1^-$, posto $x = -1-h,\ h > 0$.

$$f(x) = e^{x\ln(1+1/x)} = e^{(-1-h)(\ln(h)-\ln(1+h))} = e^{-\ln(h)+o(h)} = \frac{1}{h}(1+o(h))$$

4. $f'(x) = f(x)(\ln(1+1/x) - 1/(1+x))$. Posto $g(x) = \ln(1+1/x) - 1/(1+x)$, si ha che $g(x) \sim 1/(x^2+x),\ x \to -\infty$ e che $g'(x) = 1/(x(x+1)^2)$. Ne segue che g è crescente e positiva su $(-\infty, -1)$ e quindi che f' è positiva e f crescente nello stesso intervallo.

5. Possiamo quindi affermare che F è crescente e convessa. Usando il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, per le equivalenze asintotiche determinate nei punti 2,3, si può affermare che F non ha asintoto orizzontale ed ha asintoto verticale.

6. Si può anche studiare l'esistenza di asintoto obliquo, cioè se esistono $m, q \in \mathbb{R}$, tali che $F(x) = mx + q + o(1),\ x \to -\infty$, ragionando nel seguente modo.

   (a) È facile vedere che $m = e$.

   (b) Il calcolo di $\lim_{x\to-\infty} F(x) - ex$, equivale a studiare la convergenza dell'integrale improprio
   $$\int_{-2}^{-\infty} (f(t) - et)\, dt.$$
   L'equivalenza asintotica studiata al punto 2 implica che non esiste asintoto obliquo.

7 3-8/3. Cap.9.8

Lunedi' 3/03
Ore 8:30-10 ricevimento ed esercizi in aula 003
Mercoledi' 5/03
25,26. Cenni sulle serie di potenze e sulle serie di Taylor. Raggio di convergenza delle

serie di Taylor fondamentali.
Giovedi' 6/03
27,28. Esercizi.
Venerdi' 7/03
Ore 8:30-10 ricevimento ed esercizi in aula 009

8 10-15/3.

Mercoledi' 12/03
29,30. Esercizi
Mercoledi' 12/03
ore 14:30-16 ricevimento ed esercizi in aula 002
Giovedi' 13/03
31,32. Esercizi.

Sabato 15/03 ore 10:30 aula 111 di S.Marta
Prova intercorso