Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Lezioni A.A. 2007/2008, prof. G. Stefani
Primo periodo 17/09/07 - 14/12/07
Secondo periodo 21/01/08 - 21/03/08

Testi consigliati:
M.Bertsch, R.Dal Passo, L.Giacomelli - Analisi Matematica - McGrow-Hill editore
S.Salsa, A.Squellati - Esercizi di Matematica, vol.I - Zanichelli editore

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. *Va pensato anche come un programma d'esame dettagliato.* Occasionalmente saranno proposti esercizi ed integrazioni della teoria. Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato. Altri esercizi saranno proposti in un file a parte nella sezione *Materiale didattico* della pagina web del corso.

Alcuni richiami sui **prerequisiti** si trovano anche sul testo consigliato e nel libro di esercizi, altri testi:
M. Roggero, G. Ferrarese - Matematica Zero, Corso di sopravvivenza matematica con esercizi commentati e risolti, Casa Editrice Ambrosiana
G. Malafarina - Matematica per i precorsi, McGraw-Hill
G. De Marco - ANALISI ZERO, Decibel editrice, distribuzione Zanichelli

1 17-22/9. Cap.1. Il paragrafo 1.3 (numeri complessi) del Capitolo 1 del testo non fa parte del programma

Mercoledi' 19/9
1. Spiegazioni sullo svolgimento del corso.

I prerequisiti al corso verranno ripetuti al corso di recupero, che si consiglia di seguire agli studenti che hanno avuto un basso punteggio nella parte matematica del test di accesso, anche se hanno assolto il debito. Porre particolare attenzione ai quantificatori $\forall$, $\exists$, alle proprieta' del valore assoluto, alle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e razionali, alle formule di trigonometria e alle proprieta' di logaritmi ed esponenziali.

Numeri naturali, interi, razionali, reali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Allineamenti decimali. La retta reale, proprieta' di ordine ($<, \leq$). Proprietà di densità. Proprietà di Archimede.
2. Valore assoluto (o modulo) e distanza. Disuguaglianza triangolare e di Cauchy Schwartz. Intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi. Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza. Centro (punto medio) e raggio degli intervalli limitati.
Esercizi:
1) dato un intervallo limitato, trovare la relazione fra gli estremi e il centro e raggio.
2) risolvere graficamente le seguenti disequazioni

$$|x+4| < |x-3|,\ x^2 - 4 < 0,\ x^2 \geq 8,\ x^2 \geq -5,\ x^2 \leq -5.$$

Giovedi' 20/9
3. Insiemi limitati (superiormente limitati, inferiormente limitati), maggioranti (minoranti) massimo (minimo), estremo superiore (inferiore) di un insieme. Esempi. Proprieta' di completezza (di continuità) dei numeri reali.
4. Sommatorie e proprietà. Media aritmetica e geometrica. Progressione geometrica di ragione r e sua somma.

Venerdi' 21/9
5. Cenni sulle implicazioni della completezza (proprietà di continuità) dei numeri reali: esistenza delle radici. Dimostrazione per assurdo della seguente tesi: $\sqrt{2}$ *non è razionale*, e *quindi l'insieme* $\mathbb{Q}$ *non è completo*. Caratterizzazione dell'estremo superiore.
6. Principio di induzione, somma dei primi n numeri naturali, disuguaglianza di Bernoulli ($\forall h > -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+h)^n \geq 1 + nh$). Coefficienti binomiali.

2 24-29/9. Cap.2,3

Mercoledi' 26/9
7. Funzioni reali di una variabile reale: definizione, notazione

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f(x)$$

immagine, grafico. **Convenzione sul dominio** (dominio naturale, campo di esistenza) e proprietà del grafico. Esempi di grafici di funzioni elementari: funzioni costanti, funzione identità, valore assoluto, potenze intere, radici.
8. Restrizione di una funzione. Funzioni superiormente (inferiormente) limitate, estremo superiore (inferiore), massimo (minimo), punto di massimo (minimo). Estremo superiore (inferiore), massimo (minimo) di una funzione su (o in) un sottoinsieme del dominio.
Giovedi' 27/9
9. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzioni invertibili, funzioni inverse e loro grafici. Inversa della funzione radice. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche.
10 Funzioni composte e loro proprietà, **esempio:** $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$. Funzioni invertibili su (in) un sottoinsieme del dominio. La funzione arcsin come funzione inversa della funzione $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$.
Venerdi' 28/9 Lezioni tenute dal Dott. Borsi
11. Funzione crescente e decrescente, monotona. Funzioni pari e dispari. Parte positiva, parte negativa e loro rapporto con la funzione e il valore assoluto della stessa. Funzione periodica. Definizione di arcocoseno e arcotangente e disegno del loro grafico. Metodi per disegnare il grafico di funzioni a partire da quello di funzioni note (es. $f(x \pm a)$, $[f(x) \pm a]$, $f(|x|)$, $|f(x)|$).
12. Esercizi, vedi la voce *esercizi* nella mia pagina web.

3 1-6/10. Cap.4

Mercoledi' 3/10
13. L'insieme $\mathbb{R}^*$ dei reali estesi, intorni, punti interni esterni e di frontiera, insiemi aperti e chiusi, punti di accumulazione. Teorema di Bolzano Weirstrass (senza dimostrazione). Proprietà degli insiemi limitati e chiusi.
14. Definizione di *definitivamente per* $x \to \alpha$. Definizione di limite mediante il concetto di intorno, interpretazione della definizione nel caso di $\lim_{x\to r} f(x) = \ell,\ r, \ell \in \mathbb{R}$, usando le disuguaglianze, limite di funzioni costanti, limite della funzione identità. **Compiti:** unicità del limite, definizione di $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ usando le disuguaglianze.
Giovedi' 4/10
15. Punti di accumulazione destri (sinistri), limite destro (sinistro), limite per eccesso (difetto), esempi: $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ se $f(x) = x^n,\ \frac{1}{x^n}$ e se

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

16. Proprietà dei limiti: teoremi del confronto e verifica di $\lim_{x\to 0^\pm} \sin(x)/x = 1$.
Venerdi' 5/10
17. Limiti delle funzioni monotone (dimostrazione in uno dei possibili casi), applicazione al calcolo dei possibili limiti delle funzioni $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Limiti delle funzioni elementari (senza dimostrazione).
18. Limite della composizione e cambiamento di variabile. Esempi: $\lim_{x\to 0} \ln(\sin(x)/x)$, limiti e dominio delle funzioni del tipo $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln(f(x)))$, in particolare limiti di $x \mapsto x^x$.

4 8-13/10. Cap.4,5

Mercoledi' 10/10, Giovedi' 10/10, lezioni tenute dal Dott.Borsi
19-22 Funzioni infinitesime e il simbolo $o(1)$. Proprietà dei limiti: permanenza del segno, algebra dei limiti, forme indeterminate. Limiti dei polinomi e delle funzioni razionali. Esercizi su grafici di funzioni e limiti. Per i dettagli vedi la voce *esercizi* nella mia pagina web.
Venerdi' 12/10
23. Successioni e loro limiti, successioni convergenti divergenti e indeterminate, esempi. Il numero e. Esercizi:

$$\lim \sin(n)/n, \ \lim_{x\to\infty} \sin(x)/x, \ \lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$$

e generalizzazioni date per esercizio.
24. Limiti notevoli (senza dimostrazione): $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$, $\lim \frac{e^n}{n!}$, $\lim \frac{n!}{n^n}$. Esercizi: dimostrazione dell'uguaglianza $\ln(1+1/n) = \frac{1}{n}(1+o(1))$, svolgimento dell'esercizio n.6 degli esercizi sui limiti proposti il 5/10/07

5 15-20/10. Cap. 5

Mercoledi' 17/10
25. Serie numeriche: definizione e definizione di serie convergente, divergente, indeterminata (o irregolare), somma della serie. Serie geometrica.
26. Condizione necessaria per la convergenza della serie. Serie armonica e armonica generalizzata. Serie di Mengoli: $\sum_{k\geq 2} 1/(k(k-1)) = \sum_{k\geq 2}(1/(k-1)-1/k)$. Esercizi proposti: verificacare che $0,\bar{9} = 1$ e calcolare, usando la definizione di somma di serie, la frazione generatrice di alcuni numeri decimali periodici.
Giovedi' 18/10
27. Serie numeriche a termini (definitivamente) positivi: esistenza della somma, criterio del confronto, criterio del rapporto e della radice (senza dimostrazione). Esempi fra cui

$$\sum_{n\geq 0} nx^n, \ \sum_{n\geq 0} x^n/n, \sum_{n\geq 0} x^n/n^2 , \quad x \geq 0$$

28. Convergenza assoluta: definizione e proprietà. Esercizi: completare i precedenti esempi per $x < 0$.
Venerdi' 19/10
29. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz. Esempi: serie armonica e armonica generalizzata a segni alterni. Esempio di serie a segni alterni che soddisfa la condizione necessaria ma non e' convergente. Studio del carattere della serie $\sum_{n\geq 1}(2^x-3)^k$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Esercizio proposto che verra' svolto nella prossima lezione: provare che

1. $\sin(\frac{k^2}{k^3+3}) = \frac{1}{k}(1+o(1))$

2. $\sin(\frac{k^2}{k^3+3}) > \frac{1}{2k}$ definitivamente per $k \to +\infty$

suggerimento: operare il cambiamento di variabile $x = 1/k$ e ricordarsi il limite di $\sin(x)/x$.
30. Relazione fra limiti di funzioni e successioni: non esistenza di limiti, esempi ed esercizi proposti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\sin(1/x)}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4}{\sin(x)}$$

6 22-27/10. Cap. 6

Giovedi' 25/10
31. Svolgimento dell'esercizio proposto il 19/10/07. Infinitesimi, infiniti e loro confronto. Definizione di $f = o(g)$, $f = O(g)$, $f \sim g$ per $x \to \alpha$. Ordine di infinitesimo e infinito. Esempi: polinomi e funzioni razionali, alcune funzioni che non ammettono ordine.
32. Calcolo delle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞ mediante funzioni asintotiche. Algebra degli *o piccolo*. Dimostrazione di $O(x^a)o(x^b) = o(x^{a+b})$, esercizio proposto: dimostrazione delle tesi relative all'algebra degli *o piccolo*.
33. 34. aula 002 recupero delle lezioni di mercoledi' 24/10: esercizi. Alcuni degli esercizi fatti o proposti particolarmente importanti

1. Calcolare, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0}(\sin(x))^2/x^m$ e dedurne l'ordine di infinitesimo di $(\sin(x))^2$
2. Calcolare, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^m}$ e dedurne l'ordine di infinitesimo di $1 - \cos(x)$.
3. Calcolare l'ordine di infinitesimo di $\sin(\frac{k^2}{k^3+3})$
4. Provare il seguente risultato: se $f(x) = o(1)$ per $x \to \alpha$ allora:
   1. $\sin(f(x)) \sim f(x)$ per $x \to \alpha$
   2. $1 - \cos(f(x)) \sim \frac{(f(x))^2}{4}$ per $x \to \alpha$.
5. Trovare l'infinitesimo di riferimento equivalente a $1 - \cos(\frac{x^2+2x}{3x^3+x^2+1})$, per $x \to +\infty$
6. Svolgimento dei nn. 7. e 20. degli esercizi sui confronti asintotici.
7. Svolgimento dell'esercizio 5. sulle serie.

Venerdi' 26/10 lezioni tenute dal Dott.Borsi
35. 36. Esercizi sulle serie e sui confronti asintotici. Per i dettagli vedi la voce *esercizi* nella mia pagina web.

7 29-31/10. Cap. 7

Mercoledi' 31/10
37. Definizione di continuità. Punti di discontinuità. Notazione $C^0(A, \mathbb{R})$. Continuità delle funzioni elementari. Discontinuità di salto, esempio: la funzione segno. Continuità di somma, prodotto, quoziente e della composizione.
38. Continuità a destra e sinistra, estensione per continuità, asintoti orizzontali e verticali. Esempi.

8 5-10/11. Cap. 7

Mercoledi' 7/11
39. Teorema degli zeri (dimostrazione mediante il metodo di bisezione) e del valore intermedio e loro applicazione alla determinazione del segno e dell'immagine delle funzioni continue.
40. Esercizi: uso dei confronti asintotici e del teorema degli zeri per determinare limiti, segno, immagine, e grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ e di $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)}$, esistenza di radici reali di polinomi.
Giovedi' 8/11
41. Funzioni monotone, funzioni continue su intervalli: relazioni fra continuità e monotonia, esempi e controesempi. Continuità della funzione inversa, esempi grafici, ln, exp.
42. Funzioni continue su intervalli compatti, esistenza di massimi e minimi (senza dimostrazione). L'immagine di una funzione continua definita su un intervallo, esempi grafici.
43. 44. aula 002 Esercizi di preparazione alla prova intercorso
Venerdi' 9/11
45. La funzione di Dirichlet. Applicazione della teoria delle funzioni continue sugli intervalli alla determinazione del grafico delle funzioni sinh e cosh. Esercizi: segno della funzione $\frac{x^3-2x-3}{x+5}$, il grafico e l'immagine di $\sin(x)/x$.
46. Esercizi: continuità delle funzioni definite a tratti, grafico e continuità al variare di $k \in \mathbb{R}$ delle funzioni

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1) + k & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) + k & \text{se } x > 0 \\ x^2 + k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio: disegnare i grafici delle funzioni

$$x \mapsto \ln(|x|)\ , \quad x \mapsto \tan(x)\ ,$$

determinare graficamente degli intervalli in cui la soluzione dell'equazione $\ln(|x|) = \tan(x)$ è unica, applicare ad uno di essi il metodo di bisezione e determinare quanti passi occorrono per avere la soluzione a meno di $1/100$.

9 12-17/11. Cap. 8

Mercoledi' 14/11
47. Funzioni derivabili in un punto x_0 del dominio come funzioni approssimabili con funzioni lineari. Definizione e notazione di derivata. Rapporto incrementale e suo significato. Derivabilità e continuità.
48. Esempi: polinomi di primo grado, $x \mapsto |x|$, $\sqrt[3]{x}$. Interpretazione geometrica del rapporto incrementale, derivata e retta tangente.
Giovedi' 15/11
49. Derivata destra e sinistra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale. Limite del rapporto incrementale e sua relazione col segno dell'incremento. Funzione derivata, l'insieme $C^1(A)$ delle funzioni con derivata continua su A.
50. Derivata delle funzioni elementari: x^n, $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, sin, cos, exp, ln. Proprietà delle derivate: somma, prodotto, differenza, quoziente. Lo spazio vettoriale $C^1(A)$ e linearità della derivata. Esercizio: calcolo della derivata della funzione tan.
Venerdi' 16/11
51. Derivata della composizione o regola della catena (con dimostrazione). Esercizi: calcolo della derivata di $\sinh, \cosh$, 2^x, x^x, $g(x)^{f(x)}$.
52. Derivata della funzione inversa: enunciato del teorema e interpretazione geometrica.

Esercizi:

1. Calcolo della derivata di arcsin (fatto).
2. Calcolo della derivata di arccos, arctan (proposto).
3. Usando il teorema della funzione inversa dimostrare che
$$D(e^x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow D(\ln(x)) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$$
(proposto)
4. Derivata delle funzioni definite a tratti: calcolare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$
$$x \mapsto \begin{cases} a + x\ln(x) & x > 0 \\ b\cos(3x^5) & x \leq 0 \end{cases}$$
(fatto)
5. Derivata delle funzioni definite a tratti: calcolare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$
$$x \mapsto \begin{cases} a + x\ln(x) & x \geq 1 \\ b\cos(3x^5) & x < 1 \end{cases}$$
(proposto)

10 19-24/11. Cap. 8

Mercoledi' 21/11
53. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Punti critici (o stazionari). Esistenza e calcolo degli estremi locali e globali di funzioni definite sugli intervalli.
54. Teoremi di Rolle e Lagrange (con dimostrazione).
Giovedi' 22/11
55. Conseguenze del teorema di Lagrange.

- Dimostrazione del risultato *Una funzione continua su $[a, b]$ con derivata nulla su (a, b) è costante.* Applicazione del risultato alla funzione $f = \arcsin + \arccos$, esercizio proposto: verificare che la funzione $f = \arctan + arcotan$ è costante su $\mathbb{R}$ e determinare la costante.
- Monotonia e derivata: studiare i vari risultati sul libro (con dimostrazione)
- Enunciato del risultato: *Sia f una funzione continua su $[a, b]$ con derivata f' su (a, b). Se esiste il limite per $x \to a$ di $f'(x)$ allora tale limite è uguale al limite per $x \to a$ del rapporto incrementale di f in a. Analogo risultato vale nell'altro estremo dell'intervallo.*
Attenzione. Il precedente risultato è enunciato con un errore sul libro di testo, ma viene dimostrato il risultato corretto.

56. Esercizi.

- Applicazione del risultato del punto 3 al problema: per quali valori della coppia di parametri $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ la seguente funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$?

$$f : x \mapsto \begin{cases} h+\cos(x) & x>0 \\ k+x^5 & x\le 0 \end{cases}$$

  (fatto)

- Applicazione del risultato del punto 3 al problema: per quali valori della coppia di parametri $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ la seguente funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$?

$$f : x \mapsto \begin{cases} h(x-1)^x & x>1 \\ k\cos(3x^5) & x\le 1 \end{cases}$$

  esercizio parzialmente svolto: $f\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2$, e $f\in C^0(\mathbb{R})$ se e solo se $k=0$. Per completare l'esercizio resta da calcolare $\lim_{x\to1^+} f'(x)$. Sulla semiretta $(1,\infty)$ abbiamo

$$f'(x)=h(x-1)^x\frac{(x-1)\ln(x-1)+x}{x-1}=h(x-1)^{(x-1)}((x-1)\ln(x-1)+x).$$

  ne segue che $\lim_{x\to1^+} f'(x)=h$ e quindi che $f\in C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $h=k=0$.

- Disegnare il grafico della funzione $x\mapsto e^{-x^2}$ (fatto)

- Disegnare il grafico della funzione $x\mapsto he^{-(x-a)^2}$, al variare di $(h,a)\in\mathbb{R}^2$ (proposto)

ore 16:15 aula 002 Correzione della prova intercorso
Venerdi' 23/11 lezioni tenute dal Dott.Borsi
57. 58. Esercizi sul calcolo differenziale

11 26-30/11. Cap. 8

Mercoledi' 28/11
59. Teorema di de L'Hôpital (senza dimostrazione): enunciato, esempi e controesempi.
60. Funzioni convesse (concave): definizione geometrica e analitica, condizioni mediante derivate prime e seconde (senza dimostrazione). **Esercizio proposto:** dimostrare che se una funzione è derivabile e convessa su un intervallo I e $x_0\in I$ è un punto stazionario per f allora x_0 è un punto di minimo per f.
Giovedi' 29/11
61.62 Esercizi.

- Studio della cubica
- Disegnare il grafico della funzione $x\mapsto x^x$
- Caduta dei gravi
- Determinare fra i rettangoli di area assegnata (perimetro assegnato) quello, se esiste, di perimetro (area) massimo e minimo.

Venerdi' 30/11
63. Polinomio di Taylor: definizione, esempi e proprietà algebriche.
64. Teorema di Peano e suo significato in termini di approssimazione. Applicazioni ed esercizi

- Verificare che $DT_n[f, x_0] = T_{n-1}[Df, x_0]$ (proposto).
- Calcolo delle approssimazioni di MacLaurin con resto in forma di Peano delle funzioni

$$e^x, \; e^{-x}, \; \sin(x), \; \cos(x), \; \sinh(x), \; \cosh(x)$$

- Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + x^3}{x^n}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$

12 3-7/12. Cap. 8

Mercoledi' 5/12
65. Definizione di parte principale: *Se esistono $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \sim \rho x^\alpha$ per $x \to x_0$, allora ρx^α si dice la* **parte principale** *di f per $x \to x_0$.*
Calcolo dei polinomi di Maclaurin di $1/(1+x), \; 1/(1+x^2), \; \ln(1+x), \; \arctan(x)$.
66. Approssimazione di Taylor ed estremi locali. Calcolo del binomio di Newton mediante l'approssimazione di Maclaurin di $(1+x)^n$.
Giovedi' 6/12
67. Approssimazione di Taylor con resto in forma di Lagrange.
68 Esercizi
Venerdi' 7/12 lezioni tenute dal Dott.Borsi
69.70 Esercizi.