

Esercizi di Analisi 1 - ICI

26 ottobre 2007

Iacopo Borsi

Esercizio. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2 - 1}{(k^3 + 1)} \tan\left(\frac{1}{k}\right)$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Esercizio. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

e, similmente, che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1, \quad A > 0.$$

Esercizio. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie convergono :

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1 + kx^2)}$.

Esercizio. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

Esercizio. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie convergono :

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{k^2+1}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1+kx} \right)^k$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-4)^4 (2 \sin(x))^k}{\sqrt{k}}$.

Esercizio. (Proposto ma non svolto).

(a) Determinare che ordine di *infinito* (per $x \rightarrow \infty$) ha la funzione

$$f(x) = x^4 + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

(b) Determinare l'ordine *infinitesimo* (per $x \rightarrow \infty$) della funzione

$$f(x) = (1+x) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

(c) Verificare che la funzione

$$f(x) = (1 - \cos(x) + \sin(x)),$$

è *infinitesima* di ordine 1 (rispetto a x) per $x \rightarrow \infty$.

(d) Verificare che la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^5 + x^3},$$

è *infinitesima* di ordine $9/2$ (rispetto a x) per $x \rightarrow \infty$.