

# Esercizi di Analisi 1 - ICI

## Lezioni del 10 e 11 ottobre 2007

### Mercoledì 10 Ottobre.

Definizione di funzione infinitesima e del simbolo  $o(1)$ . Proprietà dei limiti: teorema della permanenza del segno (con dimostrazione), teorema della limitatezza locale (con dimostrazione), algebra dei limiti (con dimostrazione di somma e prodotto in caso di punto di accumulazione finito). Estensioni e forme indeterminate.

**Esercizio proposto (non svolto)** Facendo uso della stessa tecnica usata nelle dimostrazioni per limite di somma e prodotto, si provi che: dato  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  e  $L \in \mathbb{R}$ , se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  allora :

- $c f(x) \rightarrow c L, \forall c \in \mathbb{R}$ ;
- se  $L \neq 0, 1/f(x) \rightarrow 1/L$ .

**Esempio** La funzione  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ : definizione, grafico e riconoscimento di limite destro (sinistro) per  $x \rightarrow 0^+(0^-)$ .

**Esempio di indeterminatezza della forma (“ $\infty - \infty$ ”):** Date le funzioni  $f(x) = 1/x^2 + \operatorname{sgn}(x)$  e  $g(x) = 1/x^2$  si provi che  $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$  ma il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)),$$

è indeterminato.

**Giovedì 11 Ottobre.**

Le funzioni razionali come esempi notevoli di forme indeterminate: definizione, casi per  $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow +\infty$ .

Richiami sul concetto di radice di un polinomio.

Caso di limiti  $x \rightarrow x_0$  ove  $x_0$  è radice dei due polinomi.

**Esercizio.** Determinare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{3x + 4} \right);$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5x + 2}{x^3 + 2x} \right);$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 2}{2x^3 - 11x^2 + 6x - 5} \right);$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$

**Esercizio** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x), & x < 0; \\ -\frac{1}{x+1} & x \geq 0, \end{cases}$$

(a) Determinarne il dominio.

(b) Disegnare il grafico.

(c) Riconoscerne i limiti per  $x \rightarrow 0^+, 0^-, +\infty, -\infty$

**Esercizio** Verificare (tramite la definizione di limite) che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sin x - 2)] = -\infty.$$

**Esercizio** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1; \\ 1 + \frac{1}{x-1} & x > 1, \end{cases}$$

(a) Determinarne il dominio.

(b) Disegnare il grafico.

(c) Provare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1^+.$$

**Esercizio** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x > 0; \\ x^2 + 2 & x \leq 0, \end{cases}$$

Disegnarne il grafico e dimostrare che non è limitata né inferiormente né superiormente.