

Esercizi di Analisi 1 - ICI

Lezioni del 10 e 11 ottobre 2007

Mercoledì 10 Ottobre.

Definizione di funzione infinitesima e del simbolo $o(1)$. Proprietà dei limiti: teorema della permanenza del segno (con dimostrazione), teorema della limitatezza locale (con dimostrazione), algebra dei limiti (con dimostrazione di somma e prodotto in caso di punto di accumulazione finito). Estensioni e forme indeterminate.

Esercizio proposto (non svolto) Facendo uso della stessa tecnica usata nelle dimostrazioni per limite di somma e prodotto, si provi che: dato $x_0 \in \mathbb{R}^*$ e $L \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ allora :

- $c f(x) \rightarrow c L, \forall c \in \mathbb{R}$;
- se $L \neq 0, 1/f(x) \rightarrow 1/L$.

Esempio La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$: definizione, grafico e riconoscimento di limite destro (sinistro) per $x \rightarrow 0^+ (0^-)$.

Esempio di indeterminatezza della forma (“ $\infty - \infty$ ”): Date le funzioni $f(x) = 1/x^2 + \operatorname{sgn}(x)$ e $g(x) = 1/x^2$ si provi che $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$ ma il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)),$$

è indeterminato.

Giovedì 11 Ottobre.

Le funzioni razionali come esempi notevoli di forme indeterminate: definizione, casi per $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow +\infty$.

Richiami sul concetto di radice di un polinomio.

Caso di limiti $x \rightarrow x_0$ ove x_0 è radice dei due polinomi.

Esercizio. Determinare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3x + 4} \right);$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x + 2}{x^3 + 2x} \right);$

(c) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 2}{2x^3 - 11x^2 + 6x - 5} \right);$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x), & x < 0; \\ -\frac{1}{x+1} & x \geq 0, \end{cases}$$

(a) Determinarne il dominio.

(b) Disegnarene il grafico.

(c) Riconoscerne i limiti per $x \rightarrow 0^+, 0^-, +\infty, -\infty$

Esercizio Verificare (tramite la definizione di limite) che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sin x - 2)] = -\infty.$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1; \\ 1 + \frac{1}{x-1} & x > 1, \end{cases}$$

(a) Determinarne il dominio.

(b) Disegnarene il grafico.

(c) Provare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1^+.$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x > 0; \\ x^2 + 2 & x \leq 0, \end{cases}$$

Disegnarne il grafico e dimostrare che non è limitata né inferiormente né superiormente.