

Domanda 1)

1. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo per una funzione $f : (10, 20) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
2. Enunciare la regola per la derivazione delle funzioni composte. Usare, ove possibile, la precedente regola per determinare la derivata della funzione definita da $f(x) = \sqrt[11]{\sin(3x)}$. Nei punti in cui la regola non è applicabile la funzione f è derivabile? Nei punti in cui la f non è derivabile ammette tangente? Se si determinarle.
3. Definire il concetto di derivata di una funzione f in un punto x_0 del suo dominio. Applicare la definizione per calcolare la derivata della funzione definita da $f(x) = \frac{1}{x+3}$ nel punto $x_0 = 30$
4. Usando l'approssimazione di Taylor calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(10x^3))}{|x|^n}$$

5. (a) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n \geq 1} \frac{10^n}{n^3} x^n$.
- (b) Calcolare l'insieme su cui la precedente serie converge.
- (c) Scrivere la formula di derivazione termine a termine per la precedente serie, specificando il suo significato ed il dominio dove è valida.

6. Data la funzione definita da $f(x) = -\frac{20}{(x-3)(x-10)}$, usando il criterio del confronto asintotico, stabilire se la parte illimitata del piano contenuta nel semipiano $\{(x, y) : x \geq 30\}$ e compresa fra il grafico della funzione l'asse x ha area finita. In caso affermativo determinarla.

7. Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^{-3x} & x > 0 \\ -\frac{1}{(x-10)^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico della funzione f .
 - (b) Della funzione definita da $F(x) = \int_{11}^x f(t)dt$ determinare dominio, insieme di derivabilità, eventuali punti angolosi, cuspidi e asintoti.
 - (c) Disegnare il grafico di F .
 - (d) Interpretare in termini di aree il valore $F(x_0)$, al variare di x_0 nel dominio di F .
 - (e) Disegnare la regione S del piano definita da $\{(x, y) : |y| \leq |f(x)|\}$. L'area di S è finita? Spiegarne il motivo.
8. Data la successione $n \mapsto x_n = (11 \sqrt[n]{x})^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n \geq 3} x_n$ converge, diverge o è irregolare.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.