Analisi Matematica I [ICI] – Prova scritta per il quinto appello – 09 / 9 / 2008

–

Compito n. **54**

Domanda 1)

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo per una funzione $f \in C([3, \infty))$ e dimostrarlo.
2. Definire il significato di *primitiva di una funzione su un intervallo.* Enunciare una condizione sufficiente affinché una funzione definita su un intervallo ammetta una primitiva e descrivere l'insieme delle sue primitive. Esistono funzioni definite su un intervallo per cui l'insieme delle primitive è vuoto? Se si darne un esempio.
3. Enunciare il teorema di Lagrange e descrivere il suo significato geometrico.
4. Enunciare il teorema di Weierstrass e dare un esempio di funzione che non soddisfa a tutte le sue ipotesi ma ammette massimo e minimo.
5. Calcolare al variare di $k \in N$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2+\cos(x^3)} - \sqrt[3]{3}}{|x|^k}$$
6. Usando i polinomi di MacLaurin di $\sin(x)$ e di $\ln(1 + x)$ determinare il polinomio di MacLaurin di grado 8 di $f(x) = \ln(3 - \sin(x^2))$ e dedurne la parte principale di f e le sue derivate in 0 fino all'ordine 8.
7. Data la successione $n \mapsto x_n = (2x)^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n\geq 3} x_n$ converge, converge assolutamente, diverge o è irregolare e calcolarne l'eventuale somma.
8. Data la serie $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2} + (2x)^n\right)$ determinare:
a) la somma parziale $k-$esima
b) il limite delle somme parziali al variare di $x \in \mathbb{R}$
c) il carattere della serie, deducendolo dal punto b).
9. Sia S la superficie illimitata del piano contenuta nel semipiano delle x positive e delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $x \mapsto (x - 3)e^{-2x}$.
   (a) Usando il criterio del confronto asintotico, dimostrare che l'area di S è finita.
   (b) Calcolare l'area di S.
10. Data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{x^2}$, determinare:
a) la tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$
b) eventuali tangenti verticali
c) eventuali asintoti
11. Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{(x+2)^2}$
   (a) Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali, verticali e obliqui.
   (b) Disegnare il grafico della funzione.
   (c) Determinare dominio ed eventuali asintoti della funzione definita da $H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
   (d) Disegnare il grafico della funzione H definita nel precedente punto.
   (e) Calcolare il valore $H(-1)$ e descriverlo in termini di aree.
   (f) Calcolare il valore $H(a)$, al variare di a nel dominio di H, e descriverlo in termini di aree.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.