Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
A.A. 2007/2008, prof. G. Stefani
Domande scritte date nel secondo appello

1. Sia $f : (-10, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
   (a) Cosa significa che f è derivabile in 0?
   (b) Cosa significa che $f \in C^1((-10, +\infty))$?
   (c) Applicare la definizione del punto (a) per stabilire per quali valori di $\alpha \in [0, +\infty)$ la funzione $f_\alpha : x \mapsto |x|^\alpha \ln(10 + x)$ è derivabile in 0 e calcolarne la derivata
   (d) Esistono valori di $\alpha \in [0, +\infty)$ per cui la funzione f_α appartiene a $C^1((-10, +\infty))$? In caso affermativo calcolare la funzione derivata.

2. Definire il significato di
$$\lim_{x\to 3} f(x) = -2.$$
Applicare la precedente definizione per stabilire che
$$\lim_{x\to 3}(-2x + 4) = -2.$$

3. Definire il significato di *primitiva di una funzione f su un intervallo I* e stabilire se la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)(x-2)} & x \le 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$
ammette una primitiva su $\mathbb{R}$, giustificando la risposta. In caso affermativo determinarne una.

4. Sia $f : [10, 30] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e H una sua primitiva su $[10, 30]$. Enunciare e dimostrare la formula che permette di calcolare $\displaystyle\int_{10}^{30} f(x)dx$ tramite H.

5. Enunciare i teoremi di Rolle e Lagrange e dimostrare la loro equivalenza.

6. Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.

7. Descrivere tutte le proprietà delle funzioni continue su un intervallo, facendo riferimento agli opportuni teoremi.

8. Usando l'approssimazione di Taylor calcolare, se esiste, al variare di $n \in N$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(10 + \sin(x^3)) - \ln(10)}{x^n}$$

9. Usando l'approssimazione di Taylor calcolare, se esiste, al variare di $n \in N$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(10 + \sin(x^3)) - \ln(10)}{|x|^n}$$

10. (a) Definire il polinomio di Mclaurin di grado n per una funzione $C^\infty((-5, 10))$.

(b) Definire la serie di Mclaurin di una funzione $C^\infty((-5,10))$.

(c) Sotto quale condizione la serie di Mclaurin di una funzione $C^\infty((-5,10))$ ha raggio di convergenza non nullo?

(d) L'intervallo dove la serie di Mclaurin di una funzione $C^\infty((-5,10))$ converge, può essere $(-5,10)$?

(e) Scrivere l'approssimazione di Mclaurin di ordine 2 col resto in forma di Peano per la funzione $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

(f) Scrivere l'approssimazione di Mclaurin di ordine 4 col resto in forma di Lagrange per la funzione $x \mapsto \sin(x)$.

(g) Determinare l'approssimazione di Mclaurin di ordine 30 col resto in forma di Peano per la funzione $x \mapsto f(x) = \sqrt{5+\sin(x^{10})}$. A partire dall'approssimazione trovata calcolare il maggior numero possibile di derivate della funzione in $x_0 = 0$.

11. Determinare l'area della superficie limitata del piano definita da $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-5,10], |y| \leq \arcsin(\frac{x-5}{10})\}$.

12. Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^2-10x+5}{x-10}$.

(a) Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

(b) Usare il precedente punto e il teorema degli zeri per stabilire il segno della funzione.

(c) Disegnare il grafico della funzione.

(d) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f.

(e) Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(f) Determinare l'immagine di f.

(g) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da $G(x) = \displaystyle\int_{11}^{x} f(t)dt$, specificando il dominio.

(h) Determinare gli eventuali asintoti di G mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.

(i) Calcolare il valore $G(x_0)$, al variare di x_0 nel dominio di G e interpretarlo in termini di aree .

13. A partire dai grafici delle opportune "funzioni elementari", disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 5\arcsin(x/10) & x \geq 0 \\ \frac{30}{x-10} & x < 0 \end{cases}$.

Inoltre

(a) Determinare il dominio della funzione definita da $F(x) = \displaystyle\int_{-5}^{x^2} f(t)dt$ e determinarne la funzione derivata, specificando il dominio.

(b) Determinare gli eventuali asintoti di F.

(c) Calcolare il valore $F(\sqrt{10}\,)$ e interpretarlo in termini di aree .

(d) Calcolare il valore $F(-\sqrt{10}\,)$ e interpretarlo in termini di aree .

(e) Calcolare il valore $F(x_0)$, al variare di x_0 nel dominio di F e interpretarlo in termini di aree .

14. Data la successione $n \mapsto x_n = (11 \sqrt[10]{x})^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n \geq 5} x_n$ converge, diverge o è irregolare.