Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
A.A. 2007/2008, prof. G. Stefani
Domande scritte del primo appello

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo e dimostrarlo.
2. Definire il significato di *primitiva di una funzione su un intervallo*. Enunciare una condizione sufficiente affinché una funzione definita su un intervallo ammetta una primitiva e descrivere l'insieme delle sue primitive. Esistono funzioni definite su un intervallo per cui l'insieme delle primitive è vuoto? Se si darne un esempio.
3. Enunciare i teoremi di Rolle e Lagrange e descrivere il loro significato geometrico.
4. Enunciare il teorema di Weierstrass e dare un esempio di funzione che non soddisfa a tutte le sue ipotesi ma ammette massimo e minimo.
5. Definire il polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n e usare le sue proprietà asintotiche per $x \to x_0$ per calcolare al variare di $k \in N$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{\sqrt[7]{2+\cos(x^4)} - \sqrt[7]{3}}$$
6. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Enunciare il teorema di Peano (sulla relazione fra il polinomio di MacLaurin T_n di grado n e il comportamento asintotico di $f - T_n$). Usando il precedente teorema e i polinomi di MacLaurin di $\cos(x)$ e di $\ln(1+x)$ determinare il polinomio di MacLaurin di grado 40 di $f(x) = \ln(\cos(5x^{10}))$ e dedurne la parte principale di f e le sue derivate in 0 fino all'ordine 40.
7. Data la successione $n \mapsto x_n = (7x)^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n\geq 3} x_n$ converge, diverge o è irregolare.
8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \ln(1+7x)$.
   (a) Scrivere il polinomio di McLaurin di grado n di f.
   (b) Scrivere la serie di McLaurin di f e calcolarne il raggio di convergenza.
   (c) Usando le proprietà delle serie di potenze scrivere $\int_0^{x_0} f(x)dx$ come una serie, precisando per quali valori $x_0 \in \mathbb{R}$ la formula trovata è valida.
9. Sia S la superficie illimitata del piano contenuta nel primo quadrante e delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $x \mapsto (x-5)xe^{-2x}$.
   (a) Usando il criterio del confronto asintotico, dimostrare che l'area di S è finita.
   (b) Calcolare l'area di S.
10. Data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^\alpha}$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\int_4^\infty f(x)\,dx$ converge o diverge.
11. Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da $f(x) = \dfrac{(x-8)^2}{(x+4)^2}$

(a) Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

(b) Disegnare il grafico della funzione.

(c) Determinare il dominio della funzione definita da $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} f(t)\,dt$ e calcolarne la derivata usando la regola di derivazione della funzione composta.

(d) Disegnare il grafico della funzione H definita nel precedente punto.

(e) Calcolare il valore $H(-1/2)$ e descriverlo in termini di aree.

(f) Calcolare il valore $H(a)$, al variare di a nel dominio di H, e descriverlo in termini di aree.