–

– Prova scritta per il quarto appello – 11 / 7 / 2008

– Compito n. **2**

Domanda 1)

1. Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale per una funzione $f : [10, 30] \to \mathbb{R}$ continua.
2. Enunciare la regola per la derivazione delle funzioni composte, mettendo in evidenza ipotesi e tesi. Usare, ove possibile, la precedente regola per determinare la derivata della funzione definita da $f(x) = \sqrt[11]{\cos(x)}$. Nei punti in cui la regola non è applicabile la funzione f è derivabile? Nei punti in cui la f non è derivabile ammette tangente? Se si determinarle.
3. Della funzione f definita da $f(x) = (1+x)^{\sqrt[11]{x}}$ determinare dominio, continuità ed eventuali asintoti. Inoltre calcolare, ove possibile, la derivata di f, mettendo in evidenza le regole di derivazione usate. Per i punti in cui le regole di derivazione non sono applicabili, dire se la funzione è derivabile o si tratta di punti angolosi, cuspidi o flessi a tangente verticale. Disegnare il grafico di f.
4. Rispondere alle seguenti domande sulla serie $\sum_{n\geq 11} (-10 + (-1/4)^n)$:
   a) Per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si può scrivere la somma parziale n-esima?
   b) Scrivere la somma parziale n-esima
   c) Usando la definizione stabilire il carattere della serie.
5. (a) Enunciare il criterio del rapporto per le serie e applicarlo per determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-10)^n}{n^4} x^n$ converge assolutamente.
   (b) Usare il precedente punto per calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n\geq 1} \frac{(-10)^n}{n^4} x^n$.
   (c) Calcolare l'insieme su cui la precedente serie converge.
   (d) Scrivere la formula di derivazione termine a termine per la precedente serie, specificando il suo significato ed il dominio dove è valida.
6. Calcolare $\int_1^{9/4} \frac{\cos(\ln(4x))}{x} dx$ e interpretarlo in termini di aree. Per il calcolo dell'integrale si consiglia di usare il metodo di sostituzione.
7. Senza calcolare l'integrale, che non puo' essere espresso tramite funzioni elementari, disegnare il grafico della funzione F definita da
   $$F(x) = \int_5^x \frac{1+t^4}{\ln(t/10)} dt$$
   specificando dominio, crescenza, decrescenza, esistenza di asintoti e punti singolari.
8. Data la funzione f definita da $f(x) = \frac{1+x^4}{\ln(x/10)} dt$, indichiamo con $A(d)$ l'area della parte di piano limitata dal grafico di f, l'asse x e le rette verticali $x = 5$ e $x = d$. Della funzione $A : x \mapsto A(x)$ determinare:
   a) dominio
   b) esistenza di asintoti
   c) crescenza e decrescenza
   d) esistenza di punti angolosi e le tagenti in tali punti.
   Inoltre disegnare il grafico di A e stabilire la relazione fra la funzione A e la funzione F definita al precedente punto.
9. Determinare l'approssimazione di Mclaurin di ordine 30 col resto in forma di Peano per la funzione $x \mapsto f(x) = \sqrt[4]{4 + \sin(x^{10})}$. A partire dall'approssimazione trovata calcolare il maggior numero possibile di derivate della funzione in $x_0 = 0$.
10. Definire il polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n e usare le sue proprietà asintotiche per $x \to x_0$ per calcolare al variare di $k \in \mathbb{N}$
    $$\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{\sqrt[4]{11 + \sin(|x|^{10})} - \sqrt[4]{11}}$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.