Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 2007/08
Analisi Matematica I
Esercizi sulle approssimazioni di Taylor

1. Svolgere tutti gli esercizi del testo sull'argomento, usando il concetto di parte principale.

2. Usare il concetto di parte principale per il calcolo dei limiti per $x \to 0$ di

$$\frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}, \quad \frac{\exp(x)-1-x-x^2/2}{(\cos(x)-1)^3}$$

3. A partire dal polinomio di Maclaurin di grado 2 di $\ln(1+x)$, determinare l'approssimazione di Taylor di grado 2 centrata in $x=-3$ di $\ln(-x)$ e disegnarne il grafico vicino a $x=-3$.

4. Determinare la parte principale in $x=0$ delle funzioni

$$\ln(1+x^3)-x^3, \quad \sqrt{1+x^\alpha}-1$$

   Suggerimento: usare la sostituzione $t=x^3$ per la prima e $t=x^\alpha$ per la seconda.

5. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)-x^3}{\sqrt{1+x^\alpha}-1}$$

6. Determinare la parte principale in $x=0$ delle funzioni

$$(\sinh(x)-x)^2, \quad \ln(\cos(x))+x^2/2$$

7. Determinare, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh(x)-x)^2}{\ln(\cos(x))+x^2/2}$$

8. Determinare la parte principale in $x=0$ della funzione

$$\frac{\cosh(x^2)}{1-x+\ln(1+x+x^2)}-1$$

   Suggerimento: usare la sostituzione $t=x+x^2$ e considerare l'approssimazione del secondo ordine di $1-x+\ln(1+x+x^2)$. Si consiglia di far figurare nel calcolo $O(x^3)$

9. Usare l'approssimazione di Taylor centrata in 0 col resto in forma di Lagrange della funzione $\sin(x)$ per stimare che

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}-1+\frac{x^2}{6}\right| < 10^{-6}\ , \quad \forall x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$$

   Stimare sull'intervallo $[-1,1]$

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}-1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}\right|$$

10. Determinare tutte le derivate in $x = 0$ delle funzioni
$$\frac{\cosh(x) - 1}{x^2}, \quad \frac{\cosh(x) - 1}{x}.$$

11. Calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Si consiglia di usare la trasformazione $t = 1/x$ e la parte principale di $\ln(1 + t)$.

12. Disegnare il grafico di
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad \exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

13. Calcolare la parte principale per $x \to 0^+$ delle seguenti finzioni e disegnarne il grafico vicino a 0
$$\sqrt[5]{\cos(x) - e^x}, \quad \sqrt{\left|\frac{\cos(x) - 1}{x}\right|}, \quad \sqrt{\frac{\ln(1 + x) - x + x^2/2}{1 + x^2}}, \quad \sqrt{\frac{\cos(x) + x^2/2}{1 + x^2}} - 1$$

14. Sia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione la cui parte principale per $x \to 0$ e' data da ax^r. Determinare al variare di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $r \in (0, \infty)$ l'esistenza di flessi, massimi o minimi locali e disegnarne il grafico vicino a 0.

15. Sia $f : (-1, 0] \to \mathbb{R}$ una funzione la cui parte principale per $x \to 0^-$ e' data da ax^r. Determinare al variare di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $r \in (0, \infty)$ l'esistenza di massimi o minimi locali e disegnarne il grafico vicino a 0.

16. Sia $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione la cui parte principale per $x \to 0^+$ e' data da ax^r. Determinare al variare di $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $r \in (0, \infty)$ l'esistenza di massimi o minimi locali e disegnarne il grafico vicino a 0.

17. Calcolare qualche polinomio di Taylor centrato in $x = 1$ di e^{2-2x} e stimare i relarivi resti su $[1, 3/2]$ e $[1/2, 1]$.

18. Calcolare qualche polinomio di Taylor centrato in $x = 3$ di $\ln(2x)$.

19. Calcolare qualche polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ di $\frac{1}{1+x^2}$.

20. Usando i polinomi della precedente funzione, calcolare qualche polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ di $\arctan(x)$.

21. Definire il polinomio di Taylor centrato in 0 di ordine 2 e spiegarne le sue proprieta' di approssimazione. Calcolare il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{(1 - \ln(1 + 3x))^2}{\sqrt{2 + 3x}}$$
in $x = 0$, usando le approssimazioni di Taylor di funzioni note.

22. Mediante le approssimazioni di Taylor di $\exp(y)$ e di $(1 + y)^{-1/2}$ calcolare l'approssimazione di Taylor del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{(\exp(-x))^2}{\sqrt{4 + 4x}}$$
in $x = 0$ e dedurne la derivata prima e seconda in 0.

23. Calcolare l'approssimazione di Taylor del secondo ordine della funzione

$$f(x) = \frac{(1 - \sin(2x))^2}{\sqrt[3]{2 + 3x}}$$

in $x = 0$

24. a) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = -2 \ln \left(x^3 - 5\right) + 3x.$$

b) Determinare l'approssimazione del secondo ordine della precedente funzione nel punto $x = 6$.

25. Calcolare la parte principale della funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - \sin(4x)}} - 1$, per $x \to 0$

26. Calcolare la parte principale della funzione $f(x) = \dfrac{(1 - \ln(1 + 3x))^2}{\sqrt{1 + \cos(x)}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, per $x \to 0$

27. Sapendo che la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x},$$

estesa per continuita' a 0, e' C^∞, determinarne le derivate usando l'approssimazione di Taylor di $(1 - \cos(x))$.

28. Dare la definizione di

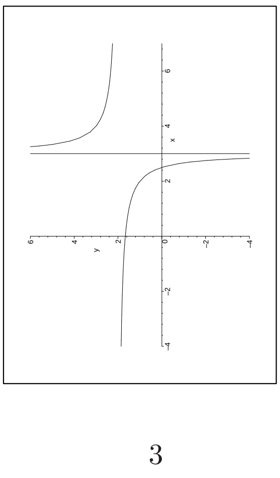
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Disegnare il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[-1, 1]$ che ha la precedente proprietá ma non ha limite per $x \to 0$

29. Scrivere i primi tre termini dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 delle funzioni $\sin(x)$ e $\ln(1+x)$. Usando tali approssimazioni calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\log(1 + 2x) - \sin(2x)|^\alpha}{\sin(x)}$$

30. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^1(\mathbb{R})$, che vale 0 in $x = 1$. Se il grafico della derivata di f e' rappresentato dalla seguente figura, dove gli asintoti hanno equazioni $x = -1$ e $y = 3$ e le intersezioni con gli assi sono nei punti $(-0.8, 0)$ e $(0, 2.8)$



a. Determinare gli eventuali punti di discontinuita', punti angolosi, punti a tangente verticale o cuspidi.
b. Determinare in quali intervalli f e' crescente, decrescente, concava o convessa.
c. Spiegare perche' f non puo' avere un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$
d. Disegnarne il grafico di f