Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I

Esempi di possibili risposte a quesiti proposti - A.A. 2007/08

Nel seguito si danno possibili risposte a quesiti proposti. Si noti che la soluzione di esercizi o la dimostrazioni di tesi possono seguire strade diverse, la cosa importante è che gli oggetti menzionati siano ben quantificati e le implicazioni evidenti o giustificate da teoremi

Dagli esempi di domande a risposta aperta

1. **Es.2 -** *Verificare, usando la definizione, che* $\lim_{x\to-\infty} 1/x^2 = 0^+$

   Per ogni $\varepsilon > 0$ la disequazione $0 < 1/x^2 < \varepsilon$ ha fra le sue soluzioni la semiretta definita da $x < -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, quindi posso affermare che:
   $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ tale che da $x \in (-\infty, \delta)$ segue $1/x^2 \in (0, \varepsilon)$, che è la definizione del limite richiesto.

2. **Es.7 -** *Dimostrare che da* $\lim_{x\to+\infty} x/e^x = 0$ *si deduce* $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

   Ipotesi: $\lim_{x\to+\infty} x/e^x = 0$

   Tesi: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

   Dimostrazione: Usando la sostituzione $t = -x$, si ha:

   $$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to+\infty} (-t)e^{-t} = -\lim_{x\to+\infty} xe^x.$$

   Usando l'ipotesi abbiamo quindi $\lim_{x\to-\infty} xe^x = -0 = 0$.

   Dimostrazione alternativa: Usando l'ipotesi e la sostituzione $t = -x$, si ha:

   $$0 = \lim_{x\to+\infty} x/e^x = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t}{e^{-t}} = -\lim_{x\to-\infty} xe^x$$

   cioè $\lim_{x\to-\infty} xe^x = -0 = 0$

Dagli esercizi sui confronti asintotici

1. **Es.16 -** *Dire se la seguente affermazione è corretta, specificandone il motivo:* $f(x) = \sin(7x^4) + \exp(-1/x^2)$ *è un infinitesimo di ordine* 4 *per* $x \to 0$.

   Da
   $$\lim_{x\to0} \frac{\sin(7x^4) + \exp(-1/x^2)}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(7x^4)}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{7x^4}{x^4} = 7$$
   si deduce che $f(x) \sim 7x^4$ per $x \to 0$ e quindi che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$: l'affermazione è corretta.

2. **Es.17 -** *Dire se la seguente affermazione è corretta, specificandone il motivo:* $\sin(7/n)\exp(-n)$ *è una successione infinitesima di ordine* 1.

   Poiché la successione $n \mapsto n\sin(7/n)\exp(-n) \sim \frac{7}{e^n}$ converge a 0, l'affermazione non è corretta, infatti $\sin(7/n)\exp(-n) = o(1/n)$.

Dagli esercizi sulla continuità

1. **Es.9 -** *Usando le proprieta' delle funzioni continue ed il concetto di limite dimostrare che l'equazione*
$$\frac{x^{37}+3x^{10}+1}{x^2+1}=k$$
ammette soluzione per ogni $k\in\mathbb{R}$

   La funzione $f : x \mapsto \frac{x^{37}+3x^{10}+1}{x^2+1}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, poiché il polinomio x^2+1 non ammette radici reali. Inoltre:
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{37}+3x^{10}+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}x^{35}=\pm\infty$$
quindi, per il teorema dei valori intermedi l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$. Ne segue che il grafico di f interseca tutte le rette orizzontali, cioè l'equazione $f(x)=k$ ammette soluzioni per ogni $k\in\mathbb{R}$.

2. **Es.11 -** *Per quali valori dei parametri* $(h,k)\in\mathbb{R}$ *la funzione definita da*
$$f(x)=\begin{cases} hx\exp(1/x) & x>0 \\ k+x^4 & x\le 0\end{cases}$$
appartiene a $C^0(\mathbb{R})$*?*

   f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, inoltre:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}hx\exp(1/x) &= \begin{cases}+\infty & h>0\\ 0 & h=0\\ -\infty & h<0\end{cases}\\ \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0}k+x^4 &= k=f(0)\,,\ \forall k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$
Quindi $f\in C^0(\mathbb{R})$ se e solo se $h=k=0$.

Dagli esercizi sulle serie

1. **Es.6 -** *Stabilire, usando la definizione, il carattere della serie* $\sum_{n\ge1}(-3)^n$.

   Il carattere della serie coincide col carattere della successione delle somme parziali:
$$n\mapsto\sum_{k=1}^{n}(-3)^k=-3\sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k=\frac{3((-3)^n-1)}{4}=\begin{cases}3(3^n-1)/4 & n \text{ pari}\\ -3(3^n+1)/4 & n\text{ dispari}\end{cases}$$
Poiché $S_{2n}\to+\infty$ e $S_{2n+1}\to-\infty$, la serie è irregolare.

2. **Esercizio.** *Usando la teoria delle serie determinare la frazione generatrice di* $1,1\overline{31}$
$$1,1\overline{31}=\frac{11}{10}+\frac{31}{1000}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right)=\frac{11}{10}+\frac{31}{10^3}\sum_{n\ge0}\frac{1}{10^{2n}}=$$
$$=\frac{11}{10}+\frac{31}{10^3}\frac{10^2}{99}=\frac{11}{10}+\frac{31}{990}$$