Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Esercizi sugli integrali

1. Senza calcolare l'integrale, che non puo' essere espresso tramite funzioni elementari, determinare crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo) della funzione F definita da

$$F(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{1+t^5}{\ln(t)} dt.$$

   Inoltre:

   a. Spiegare perche' F è definita in 0

   b. Studiando la funzione $x \mapsto \ln(x) - 2(x-1)$, verificare che nell'intervallo $[1/2, 1)$

$$(1+t^5)/\ln(t) < 1/(2(t-1))$$

   e dedurne (usando la monotonia dell'integrale) che $x = 1$ e' un asintoto verticale per F.

   c. Disegnare il grafico di F.

2. Considerare la funzione

$$H(x) = \int_{1}^{1/x} \exp(-t^2) dt$$

   Si scriva H come composizione di una funzione integrale F e la funzione $x \mapsto 1/x$, inoltre

   (a) Spiegare perché il dominio di H è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (b) Verificare che H ha un asintoto orizzontale destro e sinistro (usare il cambiamento di variabile nel limite)

   (c) Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$ e disegnarne il grafico lontano dall'origine.

   (d) Dopo aver verificato che $0 < \exp(-t^2) < 1/t^2$ per $|t| > 1$, usare il cambiamento di variabile nel limite e la monotonia dell'integrale per verificare che la funzione può essere estesa a 0 come funzione continua a destra. Verificare inoltre che tale funzione ha una discontinuità di salto.

   (e) Disegnare il grafico di H

3. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni

$$x\cos(x), \quad xe^x, \quad \cos(3x), \quad \frac{\cos(\ln(x))}{x}, \quad x\sqrt{1-x^2}, \quad x\sqrt{1+x^2}$$

4. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x\cos(2x)$ e le rette $x = 0, \quad x = \frac{3\pi}{4}$.

5. Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

6. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$

7. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x-1)^2$.

8. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x\cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$

9. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici

10. Disegnare e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa i grafici delle funzioni $y = \sqrt{2-x^2}$ e $y = 1$.

11. Disegnare il grafico di
$$f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$
   (a) Spiegare perche' f ammette primitive.
   (b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?
   (c) Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.
   (d) Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto, descrivendo al variare di $x \in \mathbb{R}$ il significato di $F(x)$ in termini di aree.
   (e) Indicata con $A(t)$ l'area della parte limitata di piano compresa fra il frafico di f, l'asse x e le rette $x = \pm t$, disegnare il grafico della funzione $x \to A(x)$ e calcolare $A(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

12. Studiare la funzione
$$t \mapsto \int_1^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx,$$
in particolare spiegare perché tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed ammette asintoti orizzontali (usare opportune limitazioni e la monotonia dell'integrale).

13. Spiegare perchè la funzione $H : t \mapsto \int_0^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx$ è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed usare il metodo di integrazione per sostituzione (o il significato geometrico dell'integrale) per dimostrare che tale funzione è pari. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} H(x)/x^n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$

14. Studiare le due funzioni
$$t \mapsto \int_1^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx, \quad t \mapsto \int_{-2}^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx.$$
In particolare si cerchi di determininare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

15. Disegnare il grafico di
$$t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

16. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \ln(\cos(t))dt\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta, spiegarne il perche' e poi disegnare il grafico di f.
Il dominio di f è $(-\pi/2, \pi/2)$.
Il dominio di f è $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$.
Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
f è infinitesima per $x \to 0$.
f ha parte principale strettamente positiva per $x \to 0$.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n$ non esiste se $n > 3$.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n$ non esiste se n è un numero naturale pari maggiore di 3.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = -x^3/6$ se $n = 3$.
f è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$.
f è infinitesima senza ordine per $x \to 0$.
f è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$.
f è infinitesima di ordine 3 per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $-x^2/2$ per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $x^2/2$ per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $-x^3/3$ per $x \to 0$.
f è non cambia segno nel suo dominio.
f è dispari.
f è pari.
f ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.

17. Sia G la funzione definita da

$$G(x) = \int_0^{\sin(x)} \exp(-t^2)dt\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
Il dominio di G è $(-\pi/2, \pi/2)$.
Il dominio di G è $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$.
Il dominio di G è $\mathbb{R}$.
G è dispari.
G è pari.
G è periodica.
$G'(x) = \exp(-x^2)$.
$G'(x) = -2x\exp(-x^2)\sin(x)$.
$G'(x) = \cos(x)\exp(-(\sin(x))^2)$.
$G'(x) = \cos(x)\exp(-x^2)$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^n$ non non esiste se $n > 3$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x = 1$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^3 = +\infty$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^2$ non esiste.
G ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.

18.

$$G(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \ln(2 - t^2)dt\,.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
Il dominio di G è $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Il dominio di G è $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$.
Il dominio di G è $\mathbb{R}$.
G è dispari.
G è pari.
G è periodica.
$G'(x) = 2\ln(2 - x^4)$.
$G'(x) \equiv 0$.
$G'(x) = 4x\ln(2 - x^4)$.
$G'(x) = 2x\ln(2 - x^4)$.
$G'(x) = 4x\ln(2 - x^2)$.
G è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$.
G è infinitesima senza ordine per $x \to 0$.
G è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^n$ non esiste se $n > 1$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x = 1$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^3 = +\infty$.
$\lim_{x\to 0} G(x)/x^2 = 2\ln(2)$.
G ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.
G ha un minimo locale nell'origine.
G ha un massimo locale nell'origine.
G ha massimo globale.
G ha due punti di minimo globale.
G ha due punti massimo globale.