Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Lezioni A.A. 2006/2007, prof. G. Stefani
Secondo periodo 22/01/07 - 25/03/07

Testi consigliati:
M.Bertsch, R.Dal Passo - Elementi di Analisi Matematica - Aracne editore
S.Salsa, A.Squellati - Esercizi di Matematica, vol.I - Zanichelli editore

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. *Va pensato anche come un programma d'esame dettagliato.* Occasionalmente saranno proposti esercizi ed integrazioni della teoria. Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato. Altri esercizi saranno proposti in un file a parte nella sezione *Materiale didattico* della pagina web del corso.

1 22-27/1/07. Integrale di Riemann, Cap.6.

Mercoledi' 22/1
1. Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato, partizioni piu' fini, partizione unione di due partizioni, somma inferiore e superiore legate ad una partizione, plurirettangoli iscritti e circoscritti, disuguglianze legate alle partizioni. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato.
2. Criterio di integrabilità basato sulla differenza fra somma inferiore e superiore associate ad una stessa partizione (senza dimostrazione). Classi di funzioni integrabili sull'intervallo $[a, b]$ (senza dimostrazione): $C([a, b])$, funzioni monotone su $[a, b]$, funzioni limitate su $[a, b]$ e continue tranne un insieme finito di punti. Esempi: funzioni costanti, funzione di Dirichlet, la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0, 1]$ estesa con qualunque valore a 0 (senza dimostrazione). Risultato senza dimostrazione: l'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un **numero finito** di valori.
Venerdi' 26/1
3. Somme integrali di Riemann. Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione):

- L'inearità dell'integrale: l'insieme $\mathcal{R}(a, b)$ delle funzioni integrabili su $[a, b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f \in \mathcal{R}(a, b) \mapsto \int_a^b$ è lineare.
- Additività rispetto all'intervallo.
- Monotonia
- Integrale di f^+, f^-, $|f|$

4. Teorema della media integrale (con dimostrazione). Integrale orientato e relazione fra integrale e area. Esempi: date

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2},\ f_2 : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

usando la teoria fin qui svolta, determinare:

- $\int_{-r}^{r} f_1(x)dx$ R. $\pi r^2/2$
- $\int_0^r f_1(x)dx$ R. $\pi r^2/4$
- $\int_0^x f_1(t)dt$ al variare di $x \in [-r, r]$ R. $\frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}$

- $\int_{-2}^{2} f_2(x)dx$ R. $\pi/2$

- $\int_{-2}^{x} f_2(t)dt$ al variare di $x \in [-2,2]$ R. $\begin{cases} \frac{x^2+2x}{2} & \text{se } x \in [-2,0] \\ \frac{\arccos(1-x)-(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- determinare l'area della parte di piano delimitata dalla funzione f_2 l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$.

5. Funzioni integrali. Le funzioni integrali sono continue e a rapporto incrementale limitato (lipschitziane), con dimostrazione.

2 29/1-3/2/07. Funzioni integrali e primitive, Cap. 6 e 5.

Mercoledi' 31/1
6. Teorema fondamentale del calcolo e sua dimostrazione (teorema 6.7 del testo).
7. Sia I un intervallo qualsiasi e $\mathcal{R}(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni integrabili su ogni intervallo limitato e chiuso contenuto in I, applicazione del teorema fondamentale del calcolo a $f \in \mathcal{R}(I)$
Esempi:

- Disegnare il grafico delle funzioni $F_{x_0}^i : x_0 \mapsto \int_{x_0}^{x} f_i(t)\, dt\,, \quad i = 1,2$, dove le f_i sono le funzioni definite nella lezione n.4 e x_0 prende diversi opportuni valori, ad esempio $x_0 = 0, -r, 1, -1, -2, 2, r$ se ammissibili.

- Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera.

Venerdi' 2/21
8. Definizione di primitiva di una funzione f su un intervallo I, struttura dell'insieme delle primitive.
9. Formula fondamentale del calcolo integrale (corollario 6.1 del testo dove è chiamato teorema fondamentale del calcolo integrale) con dimostrazione.
10. Esempi ed esercizi. **Studiare la tavola di derivazione delle funzioni elementari, interpretandola come tavola di ricerca delle primitive**.

3 5/2-10/2/07. Regole di integrazione ed aree, Cap. 6.

Mercoledi' 7/2
11. Differenziale di una funzione e regola di integrazione per parti e per sostituzione.
12. Esercizi ed esempi:

$$\int x\cos(x)\, dx\,,\ \int_0^1 x(x-1)\sin(4\pi x)\, dx\,,\ \int \cos(x)^2\, dx\,,\ \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx\,,\ \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$

$$\int_5^6 \sin(x)^2\cos(x)\, dx\,,\ \int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Esercizi proposti

$$\int x^n \sin(x)\, dx\,,\ \int x^n e^x\, dx\,,\ \int \ln(x)\, dx\,,\ \int \arctan(x)\, dx$$

Venerdi' 9/2
13. Integrazione delle funzioni razionali con denominatore di grado massimo uguale a 2. Esempi ed esercizi:

$$\int \frac{3x^3+x+1}{x+1}\,dx\,, \int \frac{x}{ax^2+1}\,dx\,, \quad \int \frac{1}{ax^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx\,, \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx\,, \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,, \int \frac{x+3}{(x+1)^2}\,dx$$

14. Derivata di funzioni del tipo $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$. Esempi ed esercizi: delle funzioni $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^{x} \arcsin(t)\,dt$ determinare dominio e derivata.
15. Area della parte di piano compresa fra i grafici di due funzioni. Esempio: area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \pi x/2$. Esercizio proposto: area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

4 12/2-17/2/. Integrali, aree, integrali impropri, Cap. 6.

Mercoledi' 12/2
16. 17 Esercizi

1. Calcolare $\int_{-2}^{2} x(x+2)(x-2)e^x dx$ e interpretarlo in termini di aree.
2. Sostituzione $x = \sinh(t)$ con applicazione al calcolo della primitiva di $x \mapsto x^3\sqrt{1+x^2}$
3. Area della parte limitata di piano delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $x \mapsto x^x(\ln(x)+1)$ e le rette di equazioni $x = 1/2$, $x = 2$.
4. Data la funzione $F(x) = \int_0^x \left(\sqrt{9t^2 + \sqrt{4-t^2}} - \sqrt{2}\right) dt$, calcolare: $\lim_{x\to 0} F(x)/x^n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$, parte principale e ordine di infinitesimo di F per $x \to 0$.

Venerdi' 16/2
18. Integrali impropri sulla semiretta: definizione, area di regioni illimitate e convergenza di $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$. Condizione necessaria : dimostrazione del seguente teorema.
Se $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b]$, per ogni $b > a$, definitivamente continua per $x \to \infty$ e $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, allora $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
19. Criteri del confronto e del confronto. Assoluta integrabilità e applicazioni.
20 Esercizi:

1. Convergenza (e assoluta convergenza) di $\int_0^\infty \sin(x)/x^2\,dx$.
2. Convergenza di $\int_0^\infty \sin(x)/x\,dx$ e grafico della funzione $x \mapsto \int_0^x \sin(t)/t\,dt$
3. Sostituzione $t = \tan(x/2)$ con applicasione al calcolo della primitiva di $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$

5 19/2-24/2 . Integrali, aree, integrali impropri, Cap. 6.

Mercoledi' 12/2
21. 22 Integrali impropri sull'intervallo: definizione, area di regioni illimitate e convergenza di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$. Criteri del confronto e del confronto asintotico, assoluta integrabilita'. Esempi ed esercizi svolti a lezione o da svolgere a casa

$$\int_0^1 \ln(x)dx\,,\ \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)}dx\,,\ \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}dx\,,\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha}dx\,,\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos(x)}dx$$

Venerdi' 16/2
23. Integrabilità in senso improprio su la retta reale, su intervalli aperti e su intervalli su cui la funzione non è limitata.
24. 25 Esercizi ed esempi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}dx\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx\,,\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^\alpha}dx\,,\ \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{sgn}(x)}{|x|^\alpha}dx\,,\ \int_{-1}^{1} \frac{\ln(|x|)}{|x|^\alpha}dx$$

Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto \displaystyle\int_0^{1/x} \exp(-t^2)dt$.

6 26/2-3/3 . Equazioni differenziali lineari, Cap. 14.

Mercoledi' 26/2
26. 27 Equazioni differenziali: generalità, esempi:

1. **Moto dei gravi (in assenza di viscosità).** In un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente, **se si trascura la resistenza dell'aria**, le equazioni differenziali sono

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = -g.$$

   Scegliendo opportunamente il sistema cartesiano, si puo' sempre ipotizzare che al tempo 0 il grave si trovi nel punto $P_0 = (0, 0, z_0)$, $z_0 \geq 0$, ed abbia velocita' $\vec{v}_0 = (a, 0, b)$, $a \geq 0$, dove $a\,\vec{\imath}$ e' la velocita' orizzontale e $b\,\vec{k}$ e' la velocita' verticale. Si ottengono le condizioni iniziali

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = z_0,\ \dot{x}(0) = a,\ \dot{y}(0) = 0,\ \dot{z}(0) = b.$$

   Il teorema di Lagrange ci permette di determinare l'equazione di moto del grave

$$x(t) = a\,t,\ y(t) = 0,\ z(t) = z_0 + b\,t - g\,\frac{t^2}{2}.$$

   Si noti che il moto e' verticale se e solo se $a = 0$ e che se $a \neq 0$ la traiettoria e' una parabola nel piano verticale che contiene $\vec{v}_0$. Le equazioni della parabola sono

$$z = z_0 + \frac{b}{a}\,x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{a^2}$$

   Esercizio proposto. Si determini l'equazione della traiettoria $z = f(x)$ in funzione del modulo (intensita') di $\vec{v}_0$, e dell'angolo (orientato) che la velocita' iniziale forma con il piano orizzontale. Si disegnino i possibili grafici della traiettoria, considerando che il piano terra abbia quota $z = 0$. Che significato ha l'approssimazione lineare della traiettoria in $x = 0$?

2. **Caduta dei gravi in mezzo viscoso.** Il moto avviene in direzione verticale e, detto $k > 0$ il coefficiente di viscosità e m la massa, l'equazione (con le notazioni del punto precedente) diventa
$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}\dot{z}.$$
Indicando $\dot{z} = v$ e $\mu = \frac{k}{m}$ si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine
$$\dot{v} + \mu v = -g.$$
Si nota che in un circuito in cui sia presente una resistenza R, una induttanza L e una differenza di potenziale $E(t)$, l'intensità di corrente $I(t)$ soddisfa ad una equazione simile alla precedente data da
$$\dot{I} + \frac{R}{L}\,I = E(t).$$

3. **Equazione di moto del pendolo per le piccole oscillazioni**. Un pendolo di lunghezza l, spostato di un angolo α dalla posizione di equilibrio stabile $\alpha = 0$ è sottoposto ad una forza (risultante della forza peso e della reazione vincolare) che ha direzione tangente alla circonferenza descritta dal pendolo e verso che si oppone allo spostamento. Un semplice conto trigonometrico mostra che l'intensità della forza è data da $g\sin(\alpha)$. L'equazione fondamentale della dinamica implica che lo spostamento dalla posizione di equilibrio $s(t) = l\,\alpha(t)$ soddisfa alla seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine.
$$\ddot{s} + g\sin(s/l) = 0.$$
Piccole oscillazioni significa che consideriamo la parte principale della forza, in questo caso l'equazione diventa
$$\ddot{s} + \frac{g}{l}\,s = 0.$$

Equazioni differenziali lineari: definizione e problema di Cauchy o ai valori iniziali
Venerdi' 2/3
28. 29. 30 Equazioni differenziali lineari del primo ordine: struttura delle soluzioni, soluzione generale e soluzione particolare. Soluzione generale dell'equazione omogenea, metodo di variazione delle costanti per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Metodi *ad hoc* per la riceca della soluzione particolare dell'equazione $y' + ay = b(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$: $b(x) = \sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$, *polinomio*, e^{rx}. Esercizi: caduta di un grave in mezzo viscoso, circuito elettrico con differenza di potenziale data da $\sin(x)$, soluzione generale di $y' + y = e^{-x}$. **Esercizi da fare:** tutti quelli del libro sulle equazioni differenziali lineari del primo ordine.

7 5/3-10/3 . Equazioni differenziali lineari, Cap. 14.

Mercoledi' 7/3
31. 32 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: struttura delle soluzioni, soluzione generale e soluzione particolare. Teorema di Cauchy per le equazioni differenziali del secondo ordine (senza dimostrazione) e suo significato geometrico. Esempi.
Venerdi' 9/3
33. 34. 35 Dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea. Metodo di variazione delle costanti per determinare la soluzione particolare. Soluzione generale delle equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. Metodi *ad hoc* per la riceca della soluzione particolare delle equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti.

8 12/3-17/3 . Equazioni differenziali lineari, Cap. 14.

Mercoledi' 14/3
36. 37. Esercizi
Venerdi' 16/3
38. 39. 40. Esercizi.

9 19/3-25/3 .

Mercoledi' 21/3
41. 42. Esercizi
Venerdi' 22/3
43. 44. 45. Esercizi