

# Corso di Laurea in Ingegneria Civile

## Analisi Matematica I

Lezioni A.A. 2006/2007, prof. G. Stefani

Primo periodo 18/09/06 - 15/12/06

Testi consigliati:

M.Bertsch, R.Dal Passo - Elementi di Analisi Matematica - Aracne editore  
S.Salsa, A.Squellati - Esercizi di Matematica, vol.I - Zanichelli editore

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. *Va pensato anche come un programma d'esame dettagliato.* Occasionalmente saranno proposti esercizi ed integrazioni della teoria. Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato. Altri esercizi saranno proposti in un file a parte nella sezione *Materiale didattico* della pagina web del corso.

Alcuni richiami sui **prerequisiti** si trovano anche sul testo consigliato e nel libro di esercizi, altri testi:

M. Roggero, G. Ferrarese - Matematica Zero, Corso di sopravvivenza matematica con esercizi commentati e risolti, Casa Editrice Ambrosiana

G. Malafarina - Matematica per i precorsi, McGraw-Hill

G. De Marco - ANALISI ZERO, Decibel editrice, distribuzione Zanichelli

## 1 18-23/9. Cap.1.

### Mercoledì' 20/9

1. Spiegazioni sullo svolgimento del corso. Prerequisiti al corso sono stati svolti nel percorso di matematica svoltosi in settembre e verranno ripetuti al corso di recupero, che si consiglia di seguire agli studenti che hanno avuto un basso punteggio nella parte matematica del test di accesso, anche se hanno assolto il debito.

Porre particolare attenzione alle proprietà del valore assoluto, alle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e razionali, alle formule di trigonometria e alle proprietà di logaritmi ed esponenziali.

Numeri naturali, interi, razionali, reali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

La retta reale, proprietà di ordine ( $<$ ,  $\leq$ ). Proprietà di densità. Proprietà di Archimede.

2. Valore assoluto (o modulo) e distanza, intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi. Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza. **Esercizio:** trovare centro (punto medio) e raggio di un intervallo limitato  $(a, b)$ . Rappresentazione grafica di intervalli e soluzioni di disequazioni e sistemi di disequazioni.

**Esercizi:** risolvere graficamente le seguenti disequazioni

$$|x + 4| < |x - 3|, \quad x^2 - 4 < 0, \quad x^2 \geq 8, \quad x^2 \geq -5, \quad x^2 \leq -5.$$

*Rivedere le proprietà di potenze, esponenziali, logaritmi.*

### Venerdì' 22/9

3. Insiemi limitati e illimitati, massimo (minimo), estremo superiore (inferiore) di un insieme. Esempio: gli intervalli. Proprietà di completezza dei numeri reali. Cenni sulle implicazioni della completezza dei numeri reali: esistenza delle radici, degli esponenziali e dei logaritmi. Potenze ad esponente reale. Dimostrazione della seguente tesi:  $\sqrt{2}$  non è razionale.

4. Funzioni: definizione, notazione  $f : A \rightarrow B$ ,  $x \mapsto f(x)$ , dominio, codominio, immagine, grafico. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione inversa. Successioni.

Insiemi numerabili.

5. Funzioni reali di una variabile reale: grafici e loro proprietà, **convenzione sul dominio** (dominio naturale, campo di esistenza).

## 2 25-30/9. Cap.2

**Mercoledì' 27/9**

6. Funzioni, pari, dispari, periodiche. Le funzioni elementari e i loro grafici. Grafici delle funzioni potenze intere e radici intere. Grafici delle funzioni potenze a esponente reale e delle funzioni esponenziali e logaritmiche. Grafico della funzione valore assoluto.

7. Funzioni composte e loro proprietà, **esempio:**  $\sqrt{x^2}$ ,  $(\sqrt{x})^2$ . Funzioni invertibili, funzione inversa e suo grafico. Restrizione di funzioni. Le funzioni trigonometriche inverse.

**Venerdì' 29/9 Lezioni tenute dalla Dott.ssa Dragoni**

8. Operazioni sui grafici, esempi.

9. 10. Esercizi. Gli esercizi svolti sono visibili a *materiale didattico/esercizi* nella mia pagina web.

## 3 2-7/10. Cap.2,3

**Mercoledì' 4/10**

11. Funzioni limitate, monotone e loro composizione. Estremo superiore e massimo di una funzione.

12. Esempi e esercizi su funzioni definite a tratti, valore assoluto, monotonia ed estremi di una funzione

**Venerdì' 6/10**

13. 14. Limiti finiti per  $x \rightarrow x_0$  di funzioni definite su intervalli. Limite destro, sinistro. Limiti infiniti per  $x \rightarrow x_0$  di funzioni definite su intervalli, asintoti verticali. Limiti per  $x \rightarrow \pm\infty$  di funzioni definite su intervalli (illimitati), asintoti orizzontali. Unicità del limite, equivalenza fra l'esistenza del limite per  $x \rightarrow x_0$  e  $x \rightarrow x_0^\pm$ .

15. Limiti grafici di funzioni: funzioni definite a tratti, funzioni ottenute per traslazioni e simmetrie di funzioni elementari.

## 4 9-14/10. Cap.3

**Mercoledì' 11/10**

16. Ordinamento su  $\mathbb{R}^*$  ( $\mathbb{R}$  esteso), intorni, punti di accumulazione e isolati. Riformulazione del concetto di *limite di  $f(x)$   $x \rightarrow \alpha$* , quando  $\alpha$  è un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ . Limite per eccesso e per difetto. Limiti di successioni.

17. Operazioni sui limiti, forme indeterminate. Funzioni infinitesime e infinite per  $x \rightarrow \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

**Venerdì' 13/10 Lezioni tenute dalla Dott.ssa Dragoni**

18. 19. 20. Proprietà dei limiti: permanenza del segno, teoremi del confronto, applicazione al calcolo di  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Limiti delle funzioni razionali. Esercizi. Gli esercizi svolti sono visibili a *materiale didattico/esercizi* nella mia pagina web.

## 5 16-21/10. Cap. 3,4

**Mercoledì' 18/10**

21. Significato della locuzione *definitivamente per  $x \rightarrow \alpha$* . Limiti delle funzioni definitivamente monotone.

**22.** Limiti di successioni e teorema ponte. Non esistenza di limiti. Il numero  $e$ .

**Venerdì 20/10**

**23.** Limite della composizione di funzioni (cambiamento di variabile). Le funzioni del tipo  $x \mapsto g(x)^{f(x)} = \exp(f(x) \ln(g(x))) = e^{f(x) \ln(g(x))}$ . Esempi: limiti di  $\sin(1/x)$  e  $x^x$  per  $x \rightarrow \infty$ , limiti di  $x^{\cos(x)}$  e  $x^x$  per  $x \rightarrow 0$ .

**24.** Infinitesimi, infiniti e loro confronto. Definizione di  $f = o(g)$ ,  $f = O(g)$ ,  $f \sim g$  per  $x \rightarrow \alpha$ . Calcolo delle forme indeterminate  $0/0$  e  $\infty/\infty$  mediante funzioni asintotiche. Esempi: polinomi e funzioni razionali. Esercizio proposto: calcolare, se esiste, il limite di  $(\sin(x))^2/x^m$  per  $x \rightarrow 0$  al variare di  $m \in \mathbb{N}$ .

**25.** Definizione di continuità. Punti di discontinuità. Notazione  $C^0(A, \mathbb{R})$ . Continuità delle funzioni elementari. Discontinuità di salto, esempio: la funzione segno. Continuità di somma, prodotto, quoziente e della composizione.

## 6 23-28/10. Cap. 3,4

**Mercoledì 25/10**

**26.** Teorema degli zeri (dimostrazione mediante il metodo di bisezione) e del valore intermedio e loro applicazione alla determinazione del segno e dell'immagine delle funzioni continue.

**27.** Esercizi: segno della funzione  $\frac{x^3-2x-3}{x+5}$ , il grafico e l'immagine di  $\sin(x)/x$ . Continuità delle funzioni definite a tratti. Esempi: grafico e continuità al variare di  $k \in \mathbb{R}$  delle funzioni

$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1) + k & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) + k & \text{se } x > 0 \\ x^2 + k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio proposto: disegnare i grafici delle funzioni

$$x \mapsto \ln(|x|), \quad x \mapsto \tan(x),$$

determinare graficamente degli intervalli in cui la soluzione dell'equazione  $\ln(|x|) = \tan(x)$  è unica, applicare ad uno di essi il metodo di bisezione e determinare quanti passi occorrono per avere la soluzione a meno di  $1/100$ .

**Venerdì 27/10**

**28.** Continuità della funzione inversa, esempi grafici,  $\ln$ ,  $\exp$ . Funzioni continue su intervalli compatti, esistenza di massimi e minimi (senza dimostrazione). L'immagine di una funzione continua definita su un intervallo, esempi grafici. Esercizio: limiti, segno, immagine, e grafico di  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ . Esercizio proposto: limiti, segno, immagine, e

grafico di  $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ .

**29.** Alcuni limiti notevoli senza dimostrazione: limiti di  $e^x/x^\alpha$  e  $\ln(x)/x^\alpha$  per  $x \rightarrow \infty$  e applicazione al calcolo del limite di  $x^\alpha \ln(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Limiti di successioni:  $x^n$ ,  $n^x$ ,  $x^n/n^x$ ,  $e^n/n!$ ,  $n!/n^n$ . Infinitesimi ed infiniti di ordine  $\alpha > 0$ .

**30.** Definizione, limiti, confronti asintotici, e grafico delle funzioni  $\sinh$  e  $\cosh$ . Esercizi sui confronti asintotici e gli infinitesimi (infiniti) di ordine  $\alpha$ :

1. per  $x \mapsto \infty$ :  $3x^4 + 4x^3$  è un infinito di ordine 4,  $\sin(3/x)$  è un infinitesimo di ordine 1,  $\sqrt{3x+4}$  è un infinito di ordine  $1/2$ ,  $\exp(x)$  e  $\ln(x)$  sono infiniti che non hanno ordine.
2. per  $x \mapsto 0$ :  $\ln(x)$  è un infinito che non ha ordine,  $\cos(x) - 1$  è un infinitesimo di ordine 2,  $\sqrt[3]{3x}$  è un infinitesimo di ordine  $3/2$ .

## 7 30/10-4/11. Cap.5

### Venerdì 3/11

**31.** Retta tangente, derivata, approssimazione lineare. Derivata destra e sinistra, punti angolosi e cuspidi. Esempi: funzioni costanti,  $x$ ,  $|x|$ ,  $x^2$ ,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\sqrt{|x|}$ . Derivabilità e continuità.

**32.** Funzione derivata, l'insieme  $C^1(A)$  delle funzioni con derivata continua su  $A$ . Derivata delle funzioni elementari:  $x^n$ ,  $x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\ln$ . Proprietà delle derivate: somma, differenza, quoziente. Per esercizio: calcolare le derivate di  $\tan$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$ .

**33.** Derivata della composizione. Esercizi: calcolo della derivata di  $2^x$ ,  $x^x$ , calcolare per quali valori di  $a, b \in \mathbb{R}$  la seguente funzione appartiene a  $C^1(\mathbb{R})$

$$x \mapsto \begin{cases} ax^x & x > 0 \\ b \cos(3x^5) & x \leq 0 \end{cases}$$

## 8 6-11/11

### Mercoledì 8/11

**34.** Derivata della funzione inversa. Esempi: calcolo della derivata di  $\ln$  e di  $\arcsin$ , per esercizio: calcolare la derivata di  $\arctan$ . Esistenza delle derivate destra e sinistra. Derivata della funzione  $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$  Derivate di ordine superiore, gli insiemi  $C^k(A)$  e  $C^\infty(A)$ .

**35.** Estremi locali e derivate. Ricerca dei massimi e minimi di una funzione continua. Esercizi sulle funzioni continue su intervalli: limiti, derivate, esistenza e ricerca di massimi e minimi.

### Venerdì 10/11 Lezioni tenute dalla Dott.ssa Dragoni

**36. 37. 38.** Esercizi sulle derivate e sulla derivabilità delle funzioni definite a tratti. Esercizi di preparazione alla seconda prova intercorso: confronti asintotici, continuità ed esistenza di massimi e minimi di funzioni. Gli esercizi svolti sono visibili a *materiale didattico/esercizi* nella mia pagina web.

## 9 13-18/11. Cap.5

### Mercoledì 15/11

**39.** Teorema del valor medio o di Lagrange e sua dimostrazione tramite il teorema di Rolle. Sue conseguenze: funzioni a derivata nulla su un intervallo, monotonia e derivata.

**40.** Teorema di de l'Hôpital, esempi: limite per  $x \rightarrow \infty$  di  $\ln(x)/x$  e di  $x^4/e^x$ . Esercizi sugli infinitesimi su cui provare anche il teorema di De L'Hôpital: limite per  $x \rightarrow 0$  di  $(\cos(x) - 1)/\sin(x)$  e di  $(\sin(\sqrt{x}))^4/\tan(x^2)$ .

### Venerdì 17/11

**41.** Polinomio di Taylor e sue proprietà: linearità e relazione con la derivata. Polinomio di Taylor di un polinomio.

**42.** Teorema di Peano e resto in forma di Peano. Polinomi di Taylor (McLaurin) di  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$

**43.** Applicazioni del teorema di Peano: calcolo polinomio di McLaurin di  $e^{-x}$ , calcolo del limite per  $x \rightarrow 0$  di  $f(x)/x^n$ , al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , con

$$f(x) = \cos(x) + \sin(x) - e^x,$$

calcolo di alcune derivate in 0 della funzione  $f$ . Esercizio proposto: posto

$$g(x) = e^{-x} + \sin(x) - \cos(x),$$

calcolare il limite per  $x \rightarrow 0$  di  $g(x)/x^n$ , al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , e, usando il teorema di Peano, calcolare le derivate (almeno fino alla quinta) di  $g$  in 0.

## 10 20-25/11. Cap.5

**Mercoledì' 22/11**

44. Il binomio di Newton.

45. Parte principale di una funzione:

**Definizione.** Se  $f(x) \sim a(x - x_0)^r$ ,  $0 \neq a \in \mathbb{R}$ , per  $x \rightarrow x_0$ , si dice che  $a(x - x_0)^r$  è la parte principale di  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ . Analoghe definizioni si danno per  $x \rightarrow x_0^\pm$  e per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

- Se  $r > 0$   $f$ , è infinitesima, se  $r < 0$   $f$ , è infinita.
- Se una funzione ha parte principale non costante, ha anche ordine (come infinitesimo o infinito)
- $(f(x) - f(x_0))$  è infinitesima in  $x_0$ , la sua parte principale, quando esiste, esprime la maniera di andare a 0 dell'incremento, determina l'andamento del grafico vicino a  $x_0$  e quindi indica se ci sono massimi o minimi locali e flessi a tangente orizzontale.
- Se  $f \in C^\infty$  in un intorno di  $x_0$  ed ha parte principale per  $x \rightarrow x_0$ , allora la sua parte principale ( se esiste) è il primo termine non nullo di ogni polinomio (non nullo) di Taylor centrato in  $x_0$ . Si noti che  $\exp(-1/x^2)$  è una funzione  $C^\infty$  che ha tutte le derivate in 0 uguali a 0.

Applicazioni del concetto di parte principale al calcolo dei limiti.

**Venerdì' 24/11**

46. Approssimazione di McLaurin di  $(1 + x)^\alpha$  e sue applicazioni al calcolo delle approssimazioni di McLaurin di  $1/(1 + x)$ ,  $\ln(1 + x)$ ,  $1/(1 + x^2)$ , dato per esercizio polinomio di Taylor di  $\arctan(x)$ . Esercizi sulle approssimazioni di Taylor.

47. 48. Esercizi.

**Sarò assente dal 26/11 al 18/12, in questo periodo le lezioni saranno tenute dalla Dott.ssa Dragoni**

Argomento delle lezioni saranno: operazioni con gli infinitesimi e gli infiniti e applicazioni al calcolo dei limiti mediante l'uso delle approssimazioni di Taylor, approssimazioni di Taylor col resto in forma di Lagrange, convessità, concavità, studio del grafico delle funzioni. Saranno svolti esercizi su tutti gli argomenti svolti. **Appunti ed esercizi svolti sono visibili a *materiale didattico/esercizi* nella mia pagina web.**