

Prova scritta di Analisi Matematica I 9 CFU - C.d.L. Civile
Anno accademico 2006-2007 - Marzo07

1. Data una funzione reale f di variabile reale, sotto quali condizioni posso considerare l'integrale improprio

$$\int_4^{\infty} f(x) dx ? \quad (1)$$

Dire cosa significa che l'integrale improprio (1) converge o diverge.

Ponendo nell'integrale (1) $f(x) = \exp(\alpha x)$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale converge e calcolarne il valore.

2. Sia $f : [-20, -3] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty([-20, -3])$ tale che $f(-20) > 0$, $f(-3) < 0$, la derivata prima si annulla solo in $x = -10$ e la derivata seconda è sempre positiva. Dedurre che f si annulla una sola volta, che ha massimo in $x = -20$ e minimo in $x = -10$.

3. Data l'equazione differenziale

$$y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0 \quad (2)$$

verificare che le funzioni $y = x$ e $y = \frac{1}{x^3}$ ne sono soluzione, su quale dominio? Inoltre

- (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy definito dall'equazione (2) con condizioni iniziali $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$. Dove è definita la soluzione?
- (b) Disegnare le soluzioni dell'equazione (2) il cui grafico passa per il punto $P \equiv (1, 0)$.
- (c) Usando il metodo di variazione delle costanti determinare la soluzione generale di

$$y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 1 \quad (3)$$

- (d) Determinare la soluzione del problema di Cauchy definito dall'equazione (3) con condizioni iniziali $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 1$. Dove è definita la soluzione?

Prova scritta di Analisi Matematica I 9 CFU - C.d.L. Civile
Anno accademico 2006-2007 - Marzo07

1. Disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \frac{x+7}{x^3} \quad (4)$$

Inoltre

(a) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

determinando dominio, crescita, decrescenza, convessità concavità, eventuali punti di discontinuità e singolari.

- (b) Determinare gli eventuali asintoti mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.
- (c) Descrivere in termini di aree il valore $F(-3)$
- (d) Calcolare $F(x)$, al variare di $x \in D_F$, e interpretarlo in termini di aree
- (e) Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione $y = f(x)$ l'asse x e le rette verticali $x = -10$ e $x = -3$
- (f) L'area della parte illimitata di piano contenuta nel primo quadrante e compresa fra il grafico della funzione $y = f(x)$ l'asse x e la retta verticale $x = 10$ è finita? Se sì calcolarla.
- (g) L'area della parte illimitata di piano contenuta nel primo quadrante e compresa fra il grafico della funzione $y = f(x)$ e gli assi coordinati e la retta verticale $x = 10$ è finita? Se sì calcolarla.
- (h) L'area della parte illimitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = f(x)$ e contenuta nel primo quadrante è finita? Se sì calcolarla.

2. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificando il dominio e illustrando la teoria delle equazioni lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y' + 3y &= \frac{e^{-3x}}{3} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$