Domanda 1)
Data l'equazione differenziale $y'' + 4y = -2\cos(2x)$, rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte.

1. L'equazione ha soluzioni limitate, illimitate, periodiche?
2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione.
3. Determinare la soluzione dell'equazione il cui grafico che passa per il punto $P \equiv (0, -5)$ ed è tangente in P alla retta di equazione $y = -5 + 4x$
4. Studiare al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione il cui grafico passa per l'origine e per il punto $P \equiv (a, b)$
5. **Facoltativa.** Disegnare il grafico delle soluzioni dell'equazione omogenea associata il cui grafico passa per l'origine

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 2)
Definire il polinomio di Taylor centrato in x_0 di grado n e usare le sue proprietà asintotiche per $x \to x_0$ per calcolare al variare di $k \in N$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{\sqrt[3]{4+\cos(x^4)} - \sqrt[3]{5}}$$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 3)
Rispondere ai seguenti punti sulla funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^3 - 10x^2}{x - 9}$.

1. Usare le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento per determinare i limiti nei punti di frontiera del dominio e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.
2. Usare il teorema degli zeri per stabilire il segno della funzione.
3. Disegnare il grafico della funzione.
4. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f.
5. Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
6. Determinare l'immagine di f.
7. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{19}{2}}^{x} f(t)dt$, specificando il dominio.
8. Determinare gli eventuali asintoti di G mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.
9. Calcolare il valore $G(x_0)$, al variare di x_0 nel dominio di G e interpretarlo come somma algebrica di aree .

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 4)
Affrontare almeno uno dei seguenti temi.

1. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo e dimostrarlo.
2. Definire il significato di *primitiva di una funzione su un intervallo*. Enunciare una condizione sufficiente affinché una funzione definita su un intervallo ammetta una primitiva e descrivere l'insieme delle sue primitive. Esistono funzioni definite su un intervallo per cui l'insieme delle primitive è vuoto? Se si darne un esempio.
3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e H una sua primitiva. Enunciare e dimostrare la formula che permette di calcolare $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ tramite H.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 5)
Affrontare almeno uno dei seguenti temi.

1. Enunciare i teoremi di Rolle e Lagrange e descrivere il loro significato geometrico.
2. Enunciare i teoremi di Rolle e Lagrange e dimostrare la loro equivalenza.
3. Enunciare i teoremi di Rolle e Lagrange e dimostrarli.
4. Descrivere tutte le proprietà delle funzioni continue su un intervallo, facendo riferimento agli opportuni teoremi.

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 6)

1. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4 & \text{se } x < 0 \\ 8\arcsin(x) - 4 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$
2. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da
$$F(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$$
determinando crescenza, decrescenza, convessità concavità ed eventuali punti di discontinuità e singolari.
3. Calcolare il valore $F(1)$ e descriverlo in termini di aree.
4. Calcolare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$

Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.

Domanda 7)
Determinare al variare di $v_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 29y = e^{-2x}\cos(5x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = v_0\,. \end{cases}$$
Spiegare il legame fra v_0 e la soluzione ottenuta e disegnare i grafici delle soluzioni ottenute.
Risposta aperta: motivare tutti i passaggi.