Analisi matematica I, ICI

Esercizi: lezione I.

Federica Dragoni

Massimi e minimi di insiemi numerici.

Esercizio 1. *Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi e dire in quali casi esistono il massimo e il minimo:*

- $A = \{x \in \mathbb{R} | 4 < x^2 \leq 9\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x^2 < 9\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 5\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 \leq 5\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^3 \leq 2\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^3 \leq 2\}$;
- $A = \{p^2 | p \in \mathbb{N}\}$;
- $A = \{p^2 | p \in \mathbb{Z}\}$;
- $A = \{p^3 | p \in \mathbb{N}\}$;
- $A = \{p^3 | p \in \mathbb{Z}\}$.

Osservazione 1. $\mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{N}$ *sono insiemi discreti quindi la loro intersezione con intervalli limitati da sempre origine ad un insieme composto da un numero finito di punti. Gli insiemi composti da un numero finito di punti hanno sempre massimo e minimo. Se consideriamo l'intersezione di* $\mathbb{Q}$ *con un intervallo limitato tale considerazione non è più vera perchè* $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'estremo superiore e inferiore di* $A = \{\frac{1}{n+3} | n \in \mathbb{N}\}$ *e dire se esistono massimo e minimo.*

Traccia svolgimento.

1. Verificare che $a_n = \frac{1}{n+3}$ è decrescente.

2. La successione è decrescente quindi $\sup A = a_0 = \frac{1}{3}$ e $\inf A$ è dato dalla successione quando n "si avvicina" a $+\infty$, quindi $\inf A = 0$.

3. Dimostrare che $\inf A = 0$ sfruttando la definizione di estremo inferiore come massimo dei minoranti. Ciò equivale a dimostrare che non esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si suppone che un tale numero esista e si trova come contraddizione che l'insieme dei numeri naturali è limitato (assurdo!).

Esercizio 3. *Calcolare l'estremo superiore e inferiore di* A *e dire se esistono massimo e minimo, nei seguenti casi:*

- $A = \{\frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$*;*
- $A = \{(-1)^n - \frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$.

Campi di esistenza.

Esercizio 4. *Determinare i campi di esistenza della seguenti funzioni:*

- $(x+5)^{-3}$*;*
- $(x-3)^{-\frac{3}{2}}$*;*
- $\ln(\tan x)$*;*
- $\sqrt{|\sin x|}$*;*
- $\ln|\sin x|$*;*
- $\ln_{10}\sqrt{10x^2}$.

Funzioni inverse.

Esercizio 5. *Dimostrare che $f(x) = x^5 + 1$ è invertibile, calcolarne algebricamente l'inversa e il relativo grafico (sia tramite l'espressione algebrica dell'inversa che tramite la riflessione rispetto alla I bisettrice).*

Esercizio 6. *Determinare dominio e codominio in modo che $f(x) = x^4 + 2$ sia invertibile. Determinare la funzione inversa e disegnarne il grafico sia per riflessione rispetto alla I bisetrice che direttamente usando l'espressione algebrica trovata.*

Esercizio 7. *Disegnare i grafici delle funzioni trigonometriche inverse negli opportuni intervalli di invertibilità.*

Disequazioni con i grafici.

Esercizio 8. *Risolvere le seguenti disequazioni utilizzando il metodo grafico:*

- $x^4 - x \leq 0$;
- $|3x^2 - 6x - 5| > 0$;
- $|2x - 3| + 2 \leq |1 - x| - 1$;
- $x^2 + 2|x| - 3 < 0$.

Disequazioni irrazionali, esponenziali e logaritmiche.

Per risolvere una disequazione del tipo

$$f(P(x)) \leq f(Q(x))$$

se la funzione è iniettiva e crescente si può risolvere la disequazione

$$P(x) \leq Q(x).$$

Se la funzione è iniettiva ma decrescente si deve invertire il segno della disequazione.

Esempio 1. *Un primo esempio è il caso in cui $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$ in cui la funzione è crescente e quindi, come noto, non si inverte il segno della disequazione. Nel caso $g(x) = \lambda x$ con $\lambda < 0$, la funzione è ancora biettiva ma decrescente e quindi come noto se moltiplichiamo pe un numero negativo il verso della disequazione si inverte.*

Esempio 2. *Un altro esempio è dato dal caso dell'esponenziale e del logaritmo con base tra 0 e 1 (in tale caso la relativa funzione è decrescente) e con base maggiore di 1 (in tale caso invece la funzione è crescente).*

Schema equazioni irrazionali:

n **dispari:** Poichè $f(x) = x^n$ in tale caso è biettiva e crescente, le soluzioni dell'equazioni irrazionale

$$\sqrt[n]{P(x)} \gtreqless Q(x)$$

coincidono con le soluzioni di

$$P(x) \gtreqless [Q(x)]^n$$

n **pari:** In tale caso $f(x) = x^n$ è crescente solo per $x \geq 0$. Risolvere le corrispondenti disequazioni irrazionali diventa più delicato. È necessario stare attenti al campo di esistenza della radice ($P(x) \geq 0$) e imporre $Q(x) \geq 0$ per applicare $f(x)$ e infine vedere cosa accade quando invece abbiamo $Q(x) < 0$. In definitiva si ottiene che:

- Le soluzioni di
$$\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x)$$
coincidono con le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^n \end{cases}$$

- Le soluzioni di
$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x)$$
coincidono l'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi
$$\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^n \end{cases}$$
$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Esercizio 9. *Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:*

- $\sqrt[3]{x(x-1)} > x - 1$;
- $\sqrt{4x^2 - 1} < x - 3$.

Esercizio 10. *Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali e logaritmiche:*

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{(1-12x)x} < 3$;
- $\mathrm{e}^{|x-1|} < e^x$;
- $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq 1$;
- $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2x^2) < 0$;
- $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geq -2$ *(usare la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$ e risolvere l'equazione fratta così ottenuta)*;
- $(x+1)^{x^2-1} > 1$ *(scrivere $1 = (x+1)^0$ e risolvere i due sistemi corrispondenti rispettivamente al caso in cui l'esponenziale in base $a = x+1$ è crescente e decrescente).*

Testi di riferimento:

- M. Bertsch, R. Dal Passo.
  Elementi di Analisi Matematica.
- P. Marcellini, C. Sbordone.
  Esercitazioni di Matematica, vol 1, parte prima.