Analisi matematica I, ICI

Esercizi: lezione III.

Federica Dragoni

Continuità e derivabilità di funzioni definite a tratti.

Studiare i valori dei parametri per cui la funzione $f(x)$ risulta continua e poi derivabile in ogni punto del suo dominio, nei seguenti casi:

1. $$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}, & x\geq -2 \\ x^2+\left(a+\dfrac{1}{3}\right)x+a^2-a+\dfrac{2}{3}, & x<-2 \end{cases}$$

2. $$f(x)=\begin{cases} -\mathrm{e}^{x^2-x}, & x\geq 0 \\ x^2+(a+2b-1)x+2a-b+3, & x<0 \end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases} 1+\ln(1+x-x^2), & x\leq 0 \\ -3x^2+(2a-b+1)x-(a+b-3), & x>0 \end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-8}{x-2}, & x\neq 2 \\ k, & x=2 \end{cases}$$

Derivate.

1. $D\left[f(x)^{g(x)}\right] = D\left[\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$;
2. $D\left[x^x\right] = x^x(\ln x + 1)$;
3. $D\left[\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{4}\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}(\ln x + 2)$;
4. $D\left[\tan x\right] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{1}{\cos^2 x}$;
5. $D\left[\arctan x\right] = D\left[\tan^{-1} x\right] = \frac{1}{x^2+1}$;
6. $D\left[\arcsin x\right] = D\left[\sin^{-1} x\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
7. $D\left[x^{\arcsin x}\right] = x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right)$.

Esercizio 1 (per casa). *Calcolare* $D\left[\arccos x\right]$ *(suggerimento: prestare attenzione al dominio della funzione).*

Esempio 1. *Dimostrare che* $D\left[\mathrm{e}^x\right] = \mathrm{e}^x$*, usando la definizione di derivata.*

Massimi e minimi relativi e assoluti.

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$$

Studiare massimi e minimi relativi e estremo superiore e inferiore in $\mathbb{R}$. Determinare poi massimo e minimo assoluti in $[-4, 4]$, $[0, 4]$ e $[-2, 2]$.

Infiniti e infinitesimi.

Esempio 2. *Dimostrare che* $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ *è un infinitesimo di ordine 1 per* $x \to 0$*.*

Esercizio 2. *Dire al variare del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se la seguente funzione è un infiito o un infinitesimo (o nessuno dei due) per* $x \to +\infty$ *e calcolarne l'ordine*

$$f(x) = x^\alpha + \sin\frac{1}{\sqrt{x}}.$$