Lezioni sulla formula di Taylor.

Sviluppo di Taylor: sia x_0 punto interno del dominio di f funzione localmente regolare in x_0 ($f \in C^\infty(I)$, con I intorno di x_0), allora f si scrive localmente in x_0 come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

dove $f^{(k)}(x_0)$ indica la derivata n-esima di f in x_0 e $o((x-x_0)^n)$ è una funzione resto tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Proprietà: indichiamo con $T_n[f]$ il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0, allora

(i) $T_n[f+g] = T_n[f] + T_n[g]$,

(ii) $T_n'[f] = T_{n-1}[f]$,

(iii) metodo della sostituzione.

Esercizio 1. *Scrivere lo sviluppo di Taylor di* e^{2x+3} *centrato in* $x_0 = 0$.

Svolgimento: Si usa il metodo della sostituzione ma con molta attenzione! Notiamo che se $x \to 0$ allora, posto $y = 2x+3$, $y \nrightarrow 0$.

Si può scrivere $\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{2x}$ e usare lo sviluppo di Taylor in 0 di e^x e la sostituzione $y = 2x \to 0$ quando $x \to 0$, quindi

$$\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e}^3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} y^k + o(y^n) = \mathrm{e}^3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 2^k x^k + o(x^n).$$

Un secondo modo di procedere è quello di usare la sostituzione $y = 2x+3 \to 3$ quando $x \to 0$. In tale caso però dobbiamo considerare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \mathrm{e}^x$ centrato in 3 e non in 0. Calcoliamo tale sviluppo:

$$\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e}^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(y-3)^k + o((y-3)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^3}{k!}(y-3)^k + o((y-3)^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^3}{k!}(2x+3-3)^k + o((2x+3-3)^n) = \mathrm{e}^3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 2^k x^k + o(x^n).$$

Osservazione 1. *Il precedente esercizio fornisce anche una verifica dell'unicità del polinomio di Taylor (Teorema di Peano).*

Esercizio 2. *Scrivere lo sviluppo di Taylor di* $\arcsin x$ *centrato in* $x_0 = 0$.

Svolgimento: Usiamo la proprietà (ii) del polinomio di Taylor (polinomio della funzione derivata). Vediamo come.
Sia

$$T_n[f] = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n,$$

segue che

$$T_n'[f] = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + na_n x^{n-1} = T_{n-1}[f'].$$

Quindi noto

$$T_{n-1}[f'] = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + ... + b_{n-1} x^{n-1}$$

possiamo ricavare $T_n[f]$ ponendo

$$a_0 = f(x_0), a_1 = b_0, a_2 = \frac{b_1}{2}, a_3 = \frac{b_3}{3}, ..., a_n = \frac{b_{n-1}}{n}.$$

Consideriamo adesso $f(x) = \arcsin x$, la cui derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Calcoliamo lo sviluppo di Taylor in 0 della funzione derivata usando lo sviluppo in 0 di $(1+y)^{-1/2}$ e la sostituzione $y = -x^2$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2^k} \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^n).$$

Da questo possiamo dedurre

$$\begin{cases} a_0 = \arcsin 0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = \dfrac{1}{3} b_2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}, \\ a_4 = 0, \\ a_5 = \dfrac{1}{5} b_4 = \dfrac{1}{5}\dfrac{3}{2^3} = \dfrac{3}{40} \\ .... \end{cases}$$

quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{2k} = 0, \\ a_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2^k k!} = \dfrac{1}{2k+1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \end{cases}$$

Concludendo possiamo scrivere, localmente in 0,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Esercizio 3 (per casa). *Scrivere lo sviluppo di Taylor di* $\arctan x$ *centrato in* $x_0 = 0$.

Calcolo delle derivate, utilizzando la formula di Taylor.

Dato lo sviluppo di Taylor di una funzione f in un punto x_0, possiamo sempre ricavare da esso le derivate di qualsiasi ordine di f in x_0. Infatti

$$T_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k,$$

quindi

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k!$$

dove a_k è il coefficente di ordine k dello sviluppo di Taylor.

Esercizio 4. *Calcolare la derivata di ordine 11, 12 e 13 di* $\sin x$ *in* $x_0 = 0$.

Svolgimento: scriviamo la sviluppo di Taylor di $\sin x$ centrato in 0

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}),$$

quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} f^{(2k)}(0) = 0, \\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k. \end{cases}$$

Perciò la derivata di ordine 12 di $\sin x$ calcolata in 0 è 0 (poichè 10 è pari) mentre $f^{(11)}(0) = (-1)^5 = -1$ (poichè $11 = 2 \cdot 5 + 1$) e $f^{(13)}(0) = (-1)^6 = +1$ (poichè $13 = 2 \cdot 6 + 1$).

Esercizio 5. *Calcolare la derivata di ordine 11 di* $\arctan x + \sqrt{1+x}$ *in 0.*

Svolgimento: Usiamo la proprietà (i), ovvero $T_n[f+g] = T_n[f] + T_n[g]$, con $f(x) = \arctan x$ e $g(x) = \sqrt{1+x}$.
Scriviamo i relativi sviluppi di Taylor in 0

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

e

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{k! 2^k} x^k + o(x^n).$$

Poichè la derivata che stiamo calcolato è di ordine dispari entrambe le funzioni vi contribuiscono, pertanto

$$D^{(2k+1)} \left[\arctan x + \sqrt{1+x} \right] \Bigg|_{x=0} = \left[\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{k! 2^k} \right] (2k+1)!,$$

per ogni $k \geq 2$ ovvero per ogni derivata di ordine superiore a 5. Da ciò poichè $11 = 2 \cdot 5 + 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} D^{(11)} \left[\arctan x + \sqrt{1+x} \right] \Bigg|_{x=0} &= \left[\frac{(-1)^5}{11} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 2^{11}} \right] 11! \\ &= \left(-\frac{1}{11} + \frac{13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 2^{11}} \right) 11! \end{aligned}$$

Esercizio 6. *Calcolare la derivata di ordine 5 di* $\arcsin x$ *in 0.*

Svolgimento: dallo sviluppo di Taylor calcolato nell'Esercizio 2 possiamo dedurre

$$D^{(2k+1)} \left[\arcsin x \right] \Bigg|_{x=0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \frac{1}{2n+1} (2n+1)!$$

e quindi

$$D^{(5)} \left[\arcsin x \right] \Bigg|_{x=0} = D^{(2 \cdot 2+1)} \left[\arcsin x \right] \Bigg|_{x=0} = \left(\frac{3}{5 \cdot 2 \cdot 4} \right) 5! = 9.$$

Esercizio 7 (per casa). *Verificare il precente esercizio calcolando esplicitamente la derivata di ordine 5 di* $\arcsin x$.

Parte principale, ordine di infinitesimo e limiti.

Esercizio 8. *Calcolare la parte principale di*

$$f(x) = \frac{2 + \sinh(2x^2)}{(1 + \ln(2 + x))^2} - \frac{2}{(1 + \ln 2)^2},$$

in $x_0 = 0$.

Svolgimento: in questo caso è sufficiente verificare che $f(0) = 0$ e poi calcolare $f'(0)$. Infatti

$$f'(x) = \frac{\cosh(2x^2)4x(1 + \ln(2 + x))^2 - 2(2 + \sinh(2x^2))(1 + \ln(2 + x))\frac{1}{2+x}}{(1 + \ln(2 + x))^4},$$

quindi

$$f'(0) = \frac{-2(1 + \ln 2)}{(1 + \ln 2)^4} = -2(1 + \ln 2)^{-3}.$$

Pertanto la parte principale di $f(x)$ sviluppata in 0 è

$$-2(1 + \ln 2)^{-3}x.$$

Esercizio 9 (per casa). *Calcolare la parte principale delle seguenti funzioni*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin(2x)}}{(1 + \ln(1 + x))^2} - 1,$$

$$g(x) = \frac{\ln(2 + 2x)}{1 + \sin(2x)} - \ln 2,$$

in $x_0 = 0$.

Esercizio 10. *Calcolare la parte principale di*

$$f(x) = \frac{\cosh x^2}{1 - x + \ln(1 + x + x^2)} - 1,$$

in $x_0 = 0$.

Svolgimento: in questo caso procedere come nell'Esercizio 8 non è conveniente poichè $f(0) = f'(0) = 0$ e calcolare la derivata seconda è piuttosto complicato. Usiamo quindi lo sviluppo di Taylor e il metodo della sostituzione. Cominciamo con lo sviluppo del coseno iperbolico

$$\cosh(x^2) = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

e

$$1-x+\ln(1+x+x^2) = 1-x+(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}+o(x^3) = \frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)$$

quindi

$$\begin{aligned}(1-x+\ln(1+x+x^2))^{-1} &= 1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\right)+o\left(\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\right)\right) \\ &= 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ in 0 è quindi

$$f(x) = \left(1+\frac{x^4}{2}+o(x^6)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1 = -\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Possiamo concludere che la parte principale è $-\frac{x^2}{2}$.

Osservazione 2. *Una volta nota la parte principale possiamo ricavare la prima derivata non nulla della funzione semplicemente moltiplicando per il relativo fattoriale, ovvere* $f''(0) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Esercizio 11. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\ln(\cos x)}{x^4}.$$

<u>Svolgimento</u>: con il metodo della sostituzione ricaviamo

$$\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos x-1)) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x+\log(\cos x)}{x^4} &= \frac{1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = \\ &= \left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)\frac{x^4}{x^4}+\frac{o(x^4)}{x^4},\end{aligned}$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\ln(\cos x)}{x^4} = -\frac{1}{12}-\frac{1}{24} = -\frac{1}{8}.$$

Osservazione 3. *L'esercizio precedente ci dice che* $1-\cos x+\ln(\cos x)$ *è un infinitesimo di ordine 4.*

Esercizio 12. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Svolgimento:

$$\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^2(x+o(x^2)}$$
$$=\frac{x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^3+o(x^4)}=\frac{-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3+o(x^4)}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}\frac{x^3}{x^3}+\frac{o(x^4)}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{o(x^4)}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+x\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+x\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{1}{3}.$$

Esercizio 13. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^5}{\left(\sin x-x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Svolgimento: calcoliamo separatamente lo sviluppo di Taylor in 0 del numeratore e del denominatore

$$1-\cos x^5=1-1+\frac{x^{10}}{2}+o(x^{15})$$

e

$$\sin x-x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)-x\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^4+o(x^5)\right)$$
$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{4!9}+o(x^6)=\frac{4}{5!9}x^5+o(x^6).$$

Possiamo quindi concludere

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^5}{\left(\sin x-x\cos\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{10}}{2}+o(x^{15})}{\frac{16}{(5!9)^2}x^{10}+o(x^{11})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(5!9)^2}{16}=36450.$$

Esercizio 14. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x^2+x^4}-1+x^2}{x^4}.$$

Svolgimento: consideriamo lo sviluppo di Taylor di $\sqrt[4]{1+t}$ in 0 con $t = -4x^2+x^4$, da cui si ottiene

$$\sqrt[4]{1-4x^2+x^4} = 1-x^2+\frac{x^4}{4}-\frac{3}{32}(-4x^2+x^4)^2+o(x^4) = 1-x^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)x^4+o(x^4).$$

Possiamo quindi concludere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-4x^2+x^4}-1+x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{4}x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{5}{4}.$$

Osservazione 4. *Nell'esercizio precedente si poteva commettere l'errore di fermarsi allo sviluppo di Taylor al secondo ordine. In tale caso avremmo trovato*

$$\sqrt[4]{1-4x^2+x^4}-1+x^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^2)$$

che poteva suggerire che l'ordine di infinitesimo della funzione è 4 ma non forniva la parte principale corretta. Infatti $o(x^2)$ contiene in sé termini di ordine 4 (e a priori anche termini di ordine 3).

Esercizio 15. *Calcolare*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^3\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}-n(n^2+1)\right).$$

Svolgimento: poniamo $x=\frac{1}{n}$ e calcoliamo con lo sviluppo di Taylor il limite scritto nella seguente forma

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}(1+x)^x-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Per calcolare il limite scriviamo lo sviluppo di Taylor in $x_0=0$ di $(1+x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$. Usiamo lo sviluppo di Taylor in 0 di e^y con $y = x\ln(1+x)$ (è lecito perchè se $x\to 0$, allora $y\to 0$). Quindi

$$y = x\ln(1+x) = x\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

da cui ricaviamo

$$\mathrm{e}^{x\ln(1+x)} = \mathrm{e}^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3) = 1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

Possiamo quindi concludere

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}(1+x)^x-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) &= \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\left(1+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)= \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 16. *Calcolare l'ordine di infinitesimo di*

$$\cosh^2 x-1-x^2.$$

Svolgimento: per prima cosa dobbiamo verificare che sia un infinitesimo, ovvero

$$\lim_{x\to 0}\cosh^2 x-1-x^2=1-1=0.$$

Calcoliamo lo sviluppo di Taylor della funzione

$$\cosh^2 x=\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^5),$$

da cui

$$\cosh^2 x-1-x^2=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^5)-1-x^2=\frac{1}{3}x^4+o(x^5)$$

Possiamo quindi concludere che $\cosh^2 x-1-x^2$ è un infinitesimo di ordine 4.

Esercizio 17. *Calcolare il seguente limite parametrico:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)^n}{\sin(3x)-3x}.$$

<u>Svolgimento</u>: cominciamo con l'osservare che

$$\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^{-3x}-1)=0^- \quad \text{e} \lim_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^{-3x}-1)=0^+$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin(3x)-3x)=0^- \quad \text{e} \lim_{x\to 0^-}(\sin(3x)-3x)=0^+.$$

Consideriamo dapprima il caso $n<0$, in tale caso otteniamo che:

- se n è pari, il limite non esiste ma esistono il limite destro e il limite sinistro e sono uguali rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$;
- se n è dispari, allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)^n}{\sin(3x)-3x}=+\infty.$$

Se $n=0$, allora
$$\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)^n}{\sin(3x)-3x}=\frac{1}{\sin(3x)-3x}.$$
Quindi anche in tale caso il limite non esiste ma esistono il limite destro e il limite sinistro e sono uguali rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$.

Consideriamo infine il caso $n>0$. In tale caso otteniamo una forma indeterminata. Risolviamo il limite applicando lo sviluppo di Taylor
$$\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)^n}{\sin(3x)-3x}=\frac{\left(-3x+\frac{9}{2}x^2-\frac{27}{6}x^3+o(x^3)\right)^n}{-\frac{27}{6}x^3+o(x^3)}$$
In tale modo otteniamo un limite razionale che sappiamo risolvere facilmente.
Se $0<n<3$, il limite non esiste ma esistono limite destro e sinistro.
Se $n=3$ allora il limite esiste ed è finito. Infatti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)^3}{\sin(3x)-3x}=\frac{-27x^3+o(x^3)}{-\frac{27}{6}x^3+o(x^3)}=6.$$
Infine se $n>3$ otteniamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)^n}{\sin(3x)-3x}=0.$$

Resto di Lagrange.

Sia x_0 punto interno del dominio di f e sia f derivabile $n+1$ volte localmente in x_0.
Consideriamo lo sviluppo di Taylor di ordine n della funzione con resto di Lagrange, ovvero

$$f(x) = T_n[f](x; x_0) + R_n(x; x_0), \quad \text{localmente in } x_0,$$

dove il resto di Lagrange è definito come

$$R_n(x; x_0) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

con ξ punto compreso tra x e x_0.

Osservazione 5. *La formula scritta non è una formula esplicita perché in generale non conosciamo il punto ξ e inoltre il punto ξ dipende dal punto x e non è una costante locale in x_0, i.e. $\xi = \xi(x)$.*
È comunque una formula molto utile per determinare l'errore che si commette sostituendo a $f(x)$ il suo sviluppo di Taylor di ordine n.

Stimiamo l'errore stimando opportunamente il resto di Lagrange.
Scriviamo lo sviluppo di Taylor di ordine n in un intorno chiuso di x_0 di raggio r (quindi $I_r(x_0) = [x_0 + r, x_0 + r]$) in cui la funzione sia derivabile $(n+1)$-volte. Per ogni $x \in I_r(x_0)$ possiamo scrivere

$$f(x) - T_n[f](x; x_0) = R_n(x; x_0)$$

e quindi l'errore commesso sostituendo a $f(x)$ il suo sviluppo di Taylor si trova stimando il modulo del resto di Lagrange. Pertanto

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n[f](x; x_0)| = |R_n(x; x_0)| &\leq \sup_{|x-x_0|\leq r} |f^{(n+1)}(x)| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|x-x_0|\leq r} |f^{(n+1)}(x)|. \end{aligned}$$

Se f è sufficientemente regolare e quindi in particolare $f^{(n+1)}$ continua in $[x_0 - r, x_0 + r]$, allora

$$\sup_{|x-x_0|\leq r} |f^{(n+1)}(x)| = \max_{|x-x_0|\leq r} |f^{(n+1)}(x)| = c < +\infty.$$

Attenzione la costante c non dipende solo dalla funzione ma dipende anche da n e dal raggio dell'intorno, quindi $c = c(n, r)$.

Vediamo adesso come è possibile calcolare valori irrazionali con un errore piccolo a piacere. Sia $\varepsilon > 0$, per scrivere un valore $f(x)$ commettendo un errore minore di ε è sufficiente sostituire a $f(x)$ il suo polinomio di Taylor $T_{\overline{n}}[f](x;x_0)$ con $\overline{n}$ sufficientemente grande. In particolare dobbiamo scegliere $\overline{n}$ tale che

$$\frac{r^{\overline{n}+1}}{(\overline{n}+1)!}\sup_{|x-x_0|\leq r}|f^{(\overline{n}+1)}(x)| < \varepsilon.$$

Vediamo alcune applicazioni di tale metodo di approssimazione nei seguenti esercizi.

Esercizio 18. *Calcolare* $\sin 1$ *con cinque cifre esatte.*

Svolgimento: per ottenere cinque cifre esatte dobbiamo scrivere $\sin 1$ commettendo un errore $\varepsilon < 10^{-5}$. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ centrato in 0 con resto di Lagrange, ovvero

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x;0).$$

Stimiamo l'errore

$$|\sin x - T_{2n+1}[\sin](x;0)| \leq |R_{2n+2}(x;0)| \leq \sup_{|x|\leq r}|(-1)^{2n+2+1}|\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{r^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Dobbiamo calcolare $\sin 1$ quindi possiamo scegliere $r = 1$, pertanto

$$|\sin 1 - T_{2n+1}[\sin](1;0)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} \leq \varepsilon < 10^{-5}.$$

Cerchiamo un n sufficientemente grande.
Se $n = 1$ otteniamo

$$|\sin 1 - T_3[\sin](1;0)| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \not< 10^{-5}.$$

Se $n = 2$ otteniamo

$$|\sin 1 - T_5[\sin](1;0)| \leq \frac{1}{7!} = \frac{1}{36207} \not< 10^{-5}.$$

Se $n = 3$ otteniamo

$$|\sin 1 - T_7[\sin](1;0)| \leq \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} < 10^{-5}.$$

Quindi $n = 3$ è sufficiente. Pertanto basterà approssimare $\sin 1$ mediante il suo polinomio di Taylor di ordine 7 centrato in 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8).$$

Possiamo quindi calcolare

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} = 0,84147.$$

Esercizio 19. *Calcolare* e *con tre cifre esatte.*

Svolgimento: In tale caso dobbiamo approssimare e, commettendo un errore $\varepsilon < 10^{-3}$. Consideriamo lo sviluppo di e^x centrato in 0, ovvero

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x;0).$$

Poichè vogliamo calcolare e^x con $x = 1$ dobbiamo stimare il resto di Lagrange in un intorno chiuso dell'origine con raggio $r = |1 - 0| = 1$ ovvero nell'intervallo $[-1, 1]$. Quindi

$$|R_n(1;0)| \leq \sup_{x \in [-1,1]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [-1,1]} \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$

Osserviamo che $2 < \mathrm{e} < 3$, da cui segue

$$|R_n(1;0)| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Cerchiamo n sufficientemente grande, esattamente come abbiamo fatto nell'esercizio precedente.
Se $n = 1$ otteniamo

$$|\mathrm{e} - T_1[\mathrm{e}^x](1;0)| \leq \frac{3}{2} \not< 10^{-3}.$$

Se $n = 2$ otteniamo

$$|\mathrm{e} - T_2[\mathrm{e}^x](1;0)| \leq \frac{3}{3!} = \frac{1}{2} \not< 10^{-3}.$$

Se $n = 3$ otteniamo

$$|\mathrm{e} - T_3[\mathrm{e}^x](1;0)| \leq \frac{3}{4!} = \frac{1}{8} \not< 10^{-3}.$$

Se $n = 4$ otteniamo

$$|\mathrm{e} - T_4[\mathrm{e}^x](1;0)| \leq \frac{3}{5!} = \frac{1}{40} \not< 10^{-3}.$$

Se $n = 5$ otteniamo

$$|\mathrm{e} - T_5[\mathrm{e}^x](1;0)| \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{204} \not< 10^{-3}.$$

Se $n = 6$ otteniamo

$$|\mathrm{e} - T_7[\mathrm{e}^x](1;0)| \leq \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 10^{-3}.$$

Quindi è necessario considerare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 6, ovvero

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{6} \frac{x^k}{k!} + o(x^6)$$

in $x = 1$.
Troviamo quindi la seguente approssimazione di e:

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} = 2,718.$$

Esercizio 20 (per casa). *Calcolare* e *con quattro cifre esatte e poi con sei cifre esatte.*

Studio locale di una funzione.

Lo sviluppo di Taylor ci permette di capire l'andamento di una funzione solo localmente senza fornire nessuna informazione globale sulla funzione (ad esempio non è utilizzabile per lo studio dei massimi e minimi di una funzione data). È tuttavia molto utile nello studio della natura di un punto (ovvero quando è punto di massimo o minimo relativo) e in particolare i punti stazionari, come vedremo in seguito.

Sia x_0 punto interno per $\mathcal{D}(f)$ e f sufficientemente regolare in un intorno di x_0 in modo che il polinomio di Taylor di grado n sia ben definito. Denotiamo con $a_1, ..., a_n$ i coefficienti dello sviluppo di Taylor (quindi $a_k = f^{(k)}(x_0)k!$). Vicino a x_0 possiamo dunque scrivere

$$f(x) - a_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x_0)(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Sia a_n il primo coefficiente non nullo dello sviluppo di Taylor di $f(x) - f(x_0)$ centrato in x_0 (i.e. $a_n \neq 0$ e $a_m = 0$, per ogni $0 < m < n$).
Allora si distinguono i seguenti casi:

(A) Se $n = 2k$ con $k = 1, ...$ (i.e. n pari), allora l'andamento locale di f in x_0 è di tipo parabola e il verso della parabola è determinato dal segno di a_n ovvero dal segno della derivata n-esima di f calcolata in x_0. Quindi

$$\begin{cases} f^{(2k)}(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; \text{parabola verso l'alto} \\ f^{(2k)}(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; \text{parabola verso il basso} \end{cases}$$

(B) Se $n = 2k + 1$ con $k = 1, ...$ (i.e. n dispari e $n \neq 1$), allora l'andamento locale di f in x_0 è di tipo cubica. In particolare

$$\begin{cases} f^{(2k+1)}(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; \text{cubica crescente (i.e. di tipo } x^3) \\ f^{(2k+1)}(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; \text{cubica decrescente (i.e. di tipo } -x^3) \end{cases}$$

(C) Se $n = 1$ l'andamento locale di f in x_0 è lineare, i.e. di tipo retta. In particolare

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; \text{retta crescente} \\ f'(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; \text{retta decrescente} \end{cases}$$

L'andamento locale della funzione in x_0 ci permette di determinare quando x_0 è un punto di massimo o un punto di minimo relativo.

Lemma 1. *Sia f funzione sufficientemente regolare, localmente in x_0 con x_0 punto interno al dominio.*
Sia $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e $f^{(m)}(x_0) = 0$ per ogni $0 < m < n$. Allora

- *se $n = 2k$ con $k = 1, ...,$*

$$\begin{cases} f^{(2k)}(x_0) > 0 \Rightarrow \textit{punto di min. rel.} \\ f^{(2k)}(x_0) < 0 \Rightarrow \textit{punto di max. rel.} \end{cases}$$

- *Se $n = 2k + 1$ con $k = 0, 1, ...,$ allora x_0 non è né punto di massimo relativo interno né punto di minimo relativo interno.*
  In particolare se $k \geq 1$, x_0 si dice punto di flesso (Definizione 5).

Riscriviamo il precedente risultato in un caso particolare: quello dei punti stazionari con derivata seconda non nulla.

Definizione 1 (Punto Stazionario). *Un punto x_0 interno al dominio di f si dice stazionario se $f'(x_0) = 0$.*

Corollario 1. *Sia x_0 punto stazionario di f tale che $f''(x_0) \neq 0$, allora*

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \textit{punto di min. rel.} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \textit{punto di max. rel.} \end{cases}$$

In seguito interpreteremo tale risultato in termini di convessità e concavità della funzione.

Concludiamo lo studio locale di una funzione mediante il polinomio di Taylor dando alcuni esempi.

Esempio 1. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{\cosh x^2}{1 - x - \ln(1 + x + x^2)},$$

localmente in $x_0 = 0$.

Osserviamo che $f(0) = 1$. Per l'Esercizio 10 sappiamo che la parte principale di $f(x) - f(0)$ è $-\frac{x^2}{2} < 0$. Poichè la parte principale è di grado pari e inoltre il relativo coefficiente è negativo, allora 0 è un punto di massimo relativo interno.

Esempio 2. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{2 + \sinh(2x^2)}{(1 + \ln(2 + x))^2},$$

localmente in $x_0 = 0$.

Osserviamo che $f(0) = 2/(1+\ln 2)^2$. *Per l'Esercizio 8 sappiamo che la parte principale di* $f(x) - f(0)$ *è* $-2(1+\ln 2)^{-3}x$. *In tale caso abbiamo quindi che la funzione ha in 0 un andamento di tipo lineare in particolare la funzione è localmente decrescente (poichè* $f'(0) < 0$ *è negativo). Quindi 0 non è punto né di massimo rel. né di minimo relativo né un flesso.*

Esempio 3. *Studiare la funzione*

$$f(x) = (3 + x^2)\sinh x - 3x\cosh x,$$

localmente in $x_0 = 0$.

Osserviamo che $f(0) = 0$. *Calcoliamo la parte principale di* $f(x)$ *in 0:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= (3 + x^2)\sinh x - 3x\cosh x = \\
&= (3 + x^2)\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) - 3x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = \\
&= 3x + \frac{x^3}{2} + 3\frac{x^5}{5!} + x^3 + \frac{x^5}{6} - 3x - 3\frac{x^3}{2} - 3\frac{x^5}{4!} + o(x^6) = \\
&= \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}\right)x^3 + \left(\frac{3}{5!} - \frac{3}{4!} + \frac{1}{6}\right)x^5 + o(x^6) = \frac{1}{15}x^5 + o(x^6).
\end{aligned}$$

La parte principale è di grado dispari e maggiore di 1 quindi in 0 abbiamo un flesso. Inoltre, poichè $\frac{1}{15} > 0$ *la funzione è crescente in 0.*
Per ricavare la prima derivata non nulla della funzione in 0 è sufficiente moltiplicare il coefficiente della parte principale per il relativo fattoriale. Quindi la prima derivata non nulla in 0 è

$$f^{(5)}(0) = \frac{1}{15}5! = 8.$$

Lezioni su convessità e concavità di funzioni.

Definizione 2. *Una funzione* $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* convessa *se*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{1}$$

per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$ *e per ogni* $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ *tali che* $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{D}(f)$.

Osservazione 6. *La precendente definizione ci dice che l'immagine tramite* f *del segmento di estremi* x_1 *e* x_2 *sta tutta al di sotto del segmento di estremi* $P_1 = (x_1, f(x_1))$ *e* $P_2 = (x_2, f(x_2))$.

Esempio 4. *La parabola* $f(x) = x^2$ *è una funzione convessa in tutto* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2.$$

Osserviamo che $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$ e quindi

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + \lambda(1-\lambda)x_1^2 + \lambda(1-\lambda)x_2^2 = \\ &= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \end{aligned}$$

quindi f convessa. □

Osservazione 7. *Allo stesso modo si può dimostrare che ogni parabola rivolta verso l'alto è convessa in tutto* $\mathbb{R}$.

Definizione 3. *Una funzione* $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* convessa *se* $-f$ *è convessa.*

Osservazione 8. *La precendente definizione ci dice che l'immagine tramite* f *del segmento di estremi* x_1 *e* x_2 *sta tutta al di sopra del segmento di estremi* $P_1 = (x_1, f(x_1))$ *e* $P_2 = (x_2, f(x_2))$.

Esempio 5. *Ogni parabola rivolta verso il basso è convessa in tutto* $\mathbb{R}$.

Esempio 6. *La funzione* $f(x) = x^3$ *non è né convessa né concava in* $\mathbb{R}$. *In particolare è convessa in* $[0, +\infty)$ *e concava in* $(-\infty, 0]$.

Esercizio 21 (per casa). *Dimostrare il precedente esempio.*

Esempio 7 (caso lineare). *Sia* $f(x) = Ax + B$, *allora* f *è sia convessa che concava in* $\mathbb{R}$. *Ciò equivale a dimostrare che* (1) *vale come identità. Infatti*

$$\begin{aligned} &\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda(Ax_1 + B) + (1-\lambda)(Ax_2 + B) = \\ &= A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \lambda B + B - \lambda B = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + B = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2). \end{aligned}$$

Osservazione 9. *In realtà vale anche il viceversa, ovvero una funzione è contemporaneamente convessa e concava in* $\mathbb{R}$ *se e solo se è lineare.*

Ricapitolando per le potenze vale il seguente risultato.

Osservazione 10 (Potenze). *Sia* $f(x) = Cx^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *e* $C \neq 0$*. Allora*

- *se* n *dispari e* $n \neq 1$ *allora* f *non è né convessa né concava in* $\mathbb{R}$*,*
- *se* n *pari e* $n \neq 0$ *allora* f *è convessa se* $C > 0$ *e concava se* $C < 0$*,*
- *se* $n = 0$ *o* $n = 1$ *e quindi la funzione è una retta allora la* f *è sia convessa che concava in* $\mathbb{R}$*.*

Diamo adesso una definizione del tutto equivalente alla Definizione 2, dove usiamo una scrittura per il segmento leggermente diversa.

Definizione 4. *Una funzione* $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* convessa *se*

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{2}$$

per ogni x *compreso tra* x_1 *e* x_2*.*

Per ottere (2) a partire da (1) basta porre

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

e osservare che

$$1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

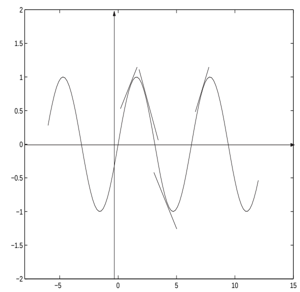
Infatti aggiungendo e sottraendo $f(x_1)$ a secondo membro possiamo riscrivere la (1) come

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = f(x_1) + (\lambda - 1)f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \\ &= f(x_1) + (1 - \lambda)(f(x_2) - f(x_1)) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)), \end{aligned}$$

ottenendo quindi la (2).

Interpretazione geometrica: convessità e retta tangente.

Esempio 8. *Sia* $f(x) = \sin x$



Osservando la figura è semplice dedurre che

$$\sin x = \begin{cases} \textit{concava in } [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ \textit{concava in } [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre dalla figura possiamo osservare che dove la funzione è concava la tangente in un punto sta al di sopra del grafico della funzione mentre dove la funzione è convessa accade il fatto inverso: la tangente in un punto sta al di sotto del grafico della funzione.

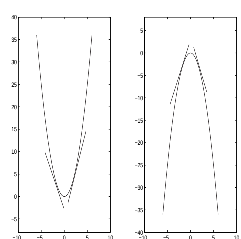
L'osservazione sulla posizione della retta tangente relativamente al grafico del seno, è un fatto che vale in generale.

Proposizione 1.

1.1. *Il grafico di una funzione convessa sta tutto al di sopra di quello di una qualsiasi retta tangente.*

1.2. *Il grafico di una funzione concava sta tutto al di sotto di quello di una qualsiasi retta tangente.*

Esempio 9. *Osservare le due seguenti parabole:*



Osservazione 11. *Se esiste la retta tangente in un punto x_0 interno al dominio di f allora esiste il limite del rapporto incrementale in x_0 (eventualmente $f'(x_0) = \pm\infty$).*

Dimostrazione. Sia f convessa, allora

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

per ogni x compreso tra x_1 e x_2. Quindi

$$f(x) - f(x_1) \leq \big(f(x_2) - f(x_1)\big)\frac{x_2 - x_1}{x - x_1},$$

poiché $\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} \geq 0$, segue che

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1).$$

Supponiamo $x_2 > x_1$, allora $x \geq x_1$, quindi consideriamo $x \to x_1^+$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \longrightarrow {f'}^+(x_1) = f'(x_1).$$

Se invece $x_2 < x_1$, allora passando al limite per $x \to x_1^-$ otteniamo $f'^-(x_1) = f'(x_1)$. Quindi in definitiva

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1),$$

da cui segue

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

per ogni x_1, x_2 nel dominio di f. Ciò implica che il grafico di f sta al di sopra della retta tangente in $P = (x_1, f(x_1))$ e ciò in ogni punto x_1. □

Convessità e derivata seconda.

Esempio 10. *Consideriamo i due casi modello per funzioni convesse e concave, ovvero $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$. Calcolando le relative derivate seconde otteniamo $f''(x) = 2 > 0$ e $g''(x) = -2 < 0$, quindi possiamo osservare che la funzione convessa f ha derivata seconda positiva mentre la funzione concava g ha derivata seconda negativa.*

Esempio 11. *Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ di cui conosciamo già gli intervalli di concavità e convessità.*
Calcolando la derivata seconda anche in questo caso otteniamo

$$f''(x) = -\sin x = \begin{cases} \leq 0, & [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ \geq 0, & [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

e quindi otteniamo nuovamente derivata seconda positiva dove la funzione è convessa e negativa dove la funzione è concava.

Le osservazioni fatte negli esempi precedenti sono proprietà generali che legano il segno della derivata seconda alla convessità di una funzione.

Teorema 1. *Sia f funzione che ammette derivata seconda in I intervallo reale*

$$f \text{ convessa [concava] in } I \;\Leftrightarrow\; f'(x_0) \geq 0 \;[\leq 0], \quad \forall\, x_0 \in I.$$

Dimostrazione euristica. Diamo solo un'idea del perchè sussiste tale legame tra derivata seconda e convessità sfruttando lo sviluppo di Taylor e la caratterezzazione della convessità mediante la tangente. Approssimiamo f con il suo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 \in I$ al secondo ordine (supponendo che i termini di ordine successivo siano trascurabili al fine di determinare il segno)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Poniamo $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, g coincide con la retta tangente a f in x_0. Quindi il segno di $f(x) - g(x)$ per ogni x vicino a x_0 coincide con il segno di $f''(x_0)$ e ciò per ogni $x_0 \in I$. Quindi se la derivata seconda è positiva otteniamo che il grafico di f è sempre al di sopra di una qualsiasi retta tangente e quindi la funzione è convessa. Viceversa se la derivata seconda è negativa allora il grafico di f giace al di sotto delle sue rette tangenti e quindi la funzione è concava. $\square$

Osservazione 12. *Trascurare i termini ordine superiore a 2 nello sviluppo di Taylor rende la precedente dimostrazione inessatta. Una dimostrazione matematica più precisa può essere trovata nel libro "Analisi matematica I" di Giusti, Teorema 10.3 e Teorema 10.4 (pag. 401-402).*

Corollario 2 (minimi e massimi relativi). *Sia x_0 punto stazionario per una funzione f dove la funzione risulta derivabile 2 volte e regolare (quindi $f'(x_0) = 0$). Se $f''(x_0) > 0$, per continuità possiamo supporre $f''(x)$ localmente in x_0 e quindi per il teorema precedente f è localmente convessa in x_0. Possiamo quindi concludere che x_0 essendo un punto a tangente orizzontale in cui la funzione è localmente convessa, è necessariamente un punto di minimo relativo interno.*
Con lo stesso ragionamento si deduce che se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo interno.

Studiamo adesso i punti di flesso.

Definizione 5 (punti di flesso). *Sia x_0 punto interno al dominio di f, allora x_0 si dice punto di flesso se f in x_0 cambia di convessità, ovvero passa da convessa a concava o viceversa.*

Corollario 3 (punti di flesso). *Sia x_0 punto stazionario in cui $f''(x_0) = 0$ e la derivata seconda cambia di segno, allora x_0 è un punto di flesso.*

Esempio 12. *Sia $f(x) = x^3$, verifichiamo che 0 è un punto di flesso. Calcoliamo le derivate e studiamone il segno*

$$f'(0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$$

quindi 0 é un punto stazionario. Inoltre

$$f''(0) = 6x\Big|_{x=0} = 0,$$

e $f''(x) > 0$ se $x > 0$ mentre $f''(x) < 0$ se $x < 0$. Possiamo quindi concludere che 0 è un punto di flesso.

Osservazione 13 (punti di flesso I). *I punti di flesso non sono necessariamente punti stazionari.*

Esempio 13. *Consideriamo* $f(x) = \frac{x^5}{5} + x - 2$. *Calcoliamo la derivata prima*

$$f'(x) = x^4 + 1 \geq 1,$$

quindi f *non ammette punti stazionari. Se calcoliamo la derivata seconda invece*

$$f''(x) = 4x^3,$$

da cui segue $f''(0) = 0$ *e* $f''(x) > 0$ *se* $x > 0$ *mentre* $f''(x) < 0$ *se* $x < 0$. *Quindi 0 è un punto di flesso pur non essendo un punto stazionario.*

Per disegnare in maniera precisa un punto di flesso è necessario disegnare la tangente in tale punto. Nel nostro esempio $f'(0) = 1 \geq 0$, *quindi otteniamo un punto di flesso crescente in cui la tangente è parallela alla prima bisettrice.*

Esempio 14 (per casa). *Verificare che* $f(x) = \arctan x$ *ha un flesso in 0 e disegnarlo in maniera precisa calcolando la retta tangente in tale punto.*

Osservazione 14 (punti di flesso II). *I punti di flesso posso essere anche punto in cui la funzione non ammette derivata seconda. In generale tali punti di flesso sono punti* x_0 *a tangente verticale (ovvero* $f'(x_0) = \pm\infty$*).*

Esempio 15. *Consideriamo* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, *il cui dominio è* $\mathbb{R}$. *Se calcoliamo la derivata prima otteniamo*

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

che è sempre positiva per $x \neq 0$ *mentre non esiste in* $x = 0$.
Se calcoliamo la derivata seconda otteniamo comunque un punto di flesso nell'origine, infatti

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}},$$

quindi non è definita in 0 ma è ben definita e positiva per ogni $x < 0$ *e ben definita e negativa per ogni* $x > 0$. *Quindi 0 è un punto di flesso di non derivabilità. Inoltre esiste*

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty,$$

quindi 0 è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 22. *Studiare gli intervalli di convessità e concavità e studiare gli eventuali punti di minimo e massimo relaivo o di flesso (individuando anche la relativa tangente) delle seguenti funzioni:*

1. $x^3 - 3x^2$,
2. $x^4 - 2x^2 + 1$,
3. $x \ln x$,
4. $(x^2 + x)\mathrm{e}^{-x}$,
5. $\frac{1}{x^2+3}$.

Punti di non derivabilità.

Concludiamo analizzando brevemente i punti di non derivabilità.
Sia dunque x_0 punto interno al dominio di f tale che la funzione risulti derivabile in un intorno di x_0 tranne che nel punto x_0. Allora possono verificarsi i seguenti casi:

1. se il limite della funzione derivata per $x \to x_0$ esiste ma è infinito, allora x_0 è un punto a tangente verticale (flesso);
2. se il limite destro e il limite sinistro della funzione derivata in x_0 sono diversi e entrambi infiniti, allora x_0 è una cuspide;
3. se il limite destro e il limite sinistro della funzione derivata in x_0 sono diversi e entrambi finiti, allora x_0 è un punto angoloso;
4. se il limite destro e il limite sinistro della funzione derivata in x_0 sono uno finito e l'altro infinito allora siamo in un caso misto (in parte cuspide e in parte punto angoloso).