Lezioni sullo studio di funzione.

Schema.

1. Calcolare il dominio della funzione $\mathcal{D}(f)$.

2. Comportamento della funzione agli estremi del dominio.
   Ad esempio se $\mathcal{D}(f) = [a, b]$ si dovrà calcolare $f(a)$ e $f(b)$, se invece $\mathcal{D}(f) = (a, b)$ si dovrà calcolare $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to b^+} f(x)$,
   se $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ allora si dovranno quattro diversi limiti
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

3. Valore della funzione in 0 (nel caso in cui $0 \in \mathcal{D}(f)$), segno nella funzione (ma solo nel caso in cui sia molto semplice da determinare), eventuali simmetrie.

4. Ricerca di eventuali asintoti obliqui a $+\infty$ o a $-\infty$.
   Ricordiamo brevemente che gli asintoti obliqui possono esistere solo nel caso in cui la funzione all'infinito tenda all'infinito, ovvero
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$
   In tale caso dobbiamo veficare se
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = q \in \mathbb{R}.$$
   Se entrambe le condizioni sono soddisfatte allora f ha come asintoto obliquo a $\pm\infty$ la retta $y = mx + q$.

5. Disegno parziale della funzione.

6. Studio della derivata prima della funzione al fine di determinare gli intervalli in cui la funzione cresce e decresce, gli eventuali punti di minimo e massimo relativo e i punti di non derivabilità.

7. Studio della derivata seconda della funzione al fine di determinare gli intervalli di convessità e concavità della funzione e i punti di flesso.

8. Grafico finale.

Esercizi svolti in classe sullo studio di funzione.

Esercizio 1. *Disegnare il grafico di* $f(x) = 3x^3 - 4x$.

Esercizio 2. *Disegnare il grafico di* $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Esercizio 3 (per casa). *Disegnare i seguenti grafici*

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 8}{2x^2 + 8},$$
$$f_2(x) = \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2,$$
$$f_3(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}.$$

Esercizio 4 (funzione pari). *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \ln x \sqrt{x}.$$

Esercizio 6 (funzione periodica). *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}.$$

Esercizio 7 (per casa). *Disegnare il grafico delle seguenti funzioni*

$$f_1(x) = x + 2 \arctan x,$$
$$f_2(x) = \cos x - \cos^2 x.$$

Grafico di alcune funzioni parametriche.

Esercizio 8. *Studiare la funzione*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|} - \mathrm{e}^{-\beta x},$$

al variare di $\alpha > \beta > 0$.

Esercizio 9. *Studiare la funzione*

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha},$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. *Studiare la funzione*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x},$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11 (per casa). *Studiare le seguenti funzioni al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

$$f_\alpha(x) = \ln x - \frac{\alpha}{x},$$

$$f_\alpha(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x + \alpha}.$$

Esercizi su equazioni e disequazioni, risolti mediante lo studio di funzione.

Esercizio 12. *Risolvere la seguente disequazione*

$$x \ln |x - 1| \geq x - 2.$$

Svolgimento: Disegnare i grafici di $f(x) = \ln|x-1|$ e $g(x) = \frac{x-2}{x}$. Si ottiene che l'equazione è risolta per $x \in [\beta, \alpha] \cup [2, +\infty)$ con $\beta < 0$ e $0 < \alpha < 1$.

Esercizio 13. *Determinare il numero di soluzioni reali distinte*

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x = k,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Disegnare il grafico di

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

si ottiene un punto di massimo relativo in $x = -2$ e un punto di minimo relativo in $x = 1$. Osservando il grafico si può concludere che l'equazione ammette 3 soluzioni reali distinte per $k \in (f(1), f(-2)) = (-\frac{7}{2}, 10)$, ha una sola soluzione reale per $k \in (-\infty, -\frac{7}{2}) \cup (10, +\infty)$ mentre ammette due soluzioni reali distinte (di cui una deve necessariamente essere soluzione con molteplicità 2) per $k = -\frac{7}{2}$ e $k = 10$.

Esercizi ricapitolativi.

Esercizio 14. *Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x) = \sqrt{a - 4x^2}$ ammette derivata in $x = 1$.*

Svolgimento: La funzione ammette derivata in $x = 1$ se 1 è un punto interno al dominio della funzione quindi $1 < \frac{\sqrt{a}}{2}$ e $a > 0$. Da cui possiamo concludere $a > 4$. L'esercizio non richiede altre verifiche poichè la funzione radice quadrata è regolare in ogni suo punto interno.

Per calcolare la derivata $f(x)$ usando la definizione, si deve calcolare il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a - 4(x+h)^2} - \sqrt{a - 4x^2}}{h}.$$

Questi tipi di limiti si risolvono moltiplicando per $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ sia a numeratore che a denominatore in modo da eliminare l'indeterminatezza del limite originale.
Nel nostro caso si ottiene dunque

$$\lim_{h\to 0} \frac{a - 4(x+h)^2 - a - 4x^2}{h\big(\sqrt{a - 4(x+h)^2} + \sqrt{a - 4x^2}\big)} = \frac{-8x}{2\sqrt{a - 4x^2}},$$

come sapevamo già applicando semplicemente la regola della derivata delle funzione composta.

Esercizio 15. *Calcolare la retta tangente alla funzione*

$$f(x) = (x^2 - 2)\cos\left(\frac{x\pi}{12}\right),$$

in $P = (2, f(2))$.

Soluzione: la retta tangente cercata è la retta

$$y = \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{12}\right)x - 3\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 16. *Data la funzione*

$$f(x) = -3\mathrm{e}^{-(x-3)^2},$$

(A) *f ha massimo o minimo assoluto?*

(B) *f ha massimo o minimo assoluto in $[0, 2]$?*

Svolgimento A: f è continua in $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, inoltre $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

quindi possiamo dedurre che $\sup_{\mathbb{R}} f = 0$ e non esiste il massimo mentre esiste un punto di minimo che deve necessariamente essere interno.
Quindi per determinare il minimo dobbiamo cercare i punti stazionari, ovvero

$$f'(x) = 6\mathrm{e}^{-(x-3)^2}(x-3).$$

Esiste un unico punto stazionario in $x = 3$, il minimo è dunque $f(3) = -3$.

Svolgimento B: Per il Teorema di Weirstrass esistono sia massimo che minimo in quanto f è continua e $[0, 2]$ è chiuso e limitato. Per calcolarli, poichè l'unico punto stazionario non appartiene all'intervallo, basta confrontare i valori agli estremi. Quindi

$$f(0) = -3\mathrm{e}^{-9} > f(2) = -3\mathrm{e}^{-1},$$

da cui segue che $f(0)$ è il massimo mentre $f(2)$ è il minimo.

Esercizio 17. *Provare che*

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6}\right| < 10^{-6}, \quad \forall\, x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right].$$

Svolgimento: È sufficiente considerare lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ al terzo ordine centrato in 0 con resto di Lagrange e stimarlo per $|x| \le \frac{1}{10}$. Quindi

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6}\right| = \left|\frac{x - \frac{x^3}{6} + R_4(x,0)}{x} - 1 + \frac{x^2}{6}\right| = \left|\frac{R_4(x,0)}{x}\right| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{x5!}x^5\right|$$
$$\le \sup_{\xi\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]} \frac{\left|f^{(5)}(\xi)\right|}{5!}|x|^4 \le \frac{1}{5!}\frac{1}{10^4} \sup_{\xi\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]} \left|f^{(5)}(\xi)\right| = \frac{1}{5!}\frac{1}{10^4}\,1 = \frac{1}{10^5}\frac{1}{12} < \frac{1}{10^6}.$$

Esercizio 18. *Stimare*

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right|,$$

per $x \in [-1, 1]$.

Svolgimento: Procediamo come nell'esercizio precedente

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right| = \left|\frac{x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + R_5(x,0)}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right| = \left|\frac{R_6(x,0)}{x}\right| =$$
$$= \left|\frac{f^{(7)}(\xi)}{x7!}x^7\right| \le \sup_{\xi \in [-1,1]} \frac{\left|f^{(7)}(\xi)\right|}{7!}|x|^5 \le \frac{1}{7!}\,1 \sup_{\xi \in [1,1]} \left|f^{(7)}(\xi)\right| = \frac{1}{7!}\,1 = \frac{1}{7!}.$$

Esercizio 19. *Calcolare tutte le derivate in 0 di*

$$f(x) = \frac{\cosh x - 1}{x^2}$$

e

$$g(x) = \frac{\cosh x - 1}{x}.$$

Disegnare poi i grafici locali in 0.

Svolgimento: si usa lo sviluppo di Taylor di $\cosh x$ e si ottiene:

$$\begin{aligned}
&f^{(2k)}(0) = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)},\\
&f^{(2k+1)}(0) = 0,\\
&g^{(2k)}(0) = 0,\\
&g^{(2k+1)}(0) = \frac{1}{2k+2}.
\end{aligned}$$

Per disegnare il grafico locale si deve guardare le relative parti principali nello sviluppo di Taylor.

Esercizio 20. *Disegnare il grafico locale in 0 di*

$$f(x) = \frac{\sinh x - 1}{x^5}.$$