Analisi matematica I, ICI

Esercizi: lezione II.

Federica Dragoni

Teorema della permanenza del segno.

Enunciato e dimostrazione.

Esercizio 1. $\lim_{x\to 0} x+3=3>0$, *applicazione del teorema e rappresentazione grafica.*

Esercizio 2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, *applicazione del teorema e rappresentazione grafica.*

Teorema dei carabinieri.

Enunciato e dimostrazione.

Esercizio 3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$, *dimostrazione del limite e rappresentazione grafica.*

Esercizio 4. $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$, *per sostituzione* $y=x^{-1}$.

Esercizio 5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}=0$, *dimostrazione del limite.*

Generalizzazione del precedente esempio per dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 1. *Sia f funzione limitata, allora*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Esempio 1. *Il precedente risultato può essere applicato a* $\sin x$, $\cos x$ *e* $\arctan x$.

Esercizio 6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x+2}=1$, *usando* $\lim_{x\to+\infty} x^{-1}=0$.

Funzioni razionali.

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi di grado n e m, rispettivamente, e coefficenti a_i e b_j, per $i = 0, ..., n$ e $j = 0, ..., m$.

1. Caso $x \to x_0$ con x_0 radice di $P(x)$ e di $Q(x)$.
Risoluzione di diversi esempi e ripasso della divisione tra polinomi.
Infatti se x_0 è radice di $P(x)$ e $Q(x)$ allora $(x - x_0)$ divide sia $P(x)$ che $Q(x)$.

Esercizio 7. $\lim_{x\to 0} \frac{x^5+x}{x^3+x} = 1.$

Esercizio 8. $\lim_{x\to 0} \frac{x^5+x^2}{x^3+x} = 0.$

Esercizio 9. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^5+x}{x^3+x^2} = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^5+x}{x^3+x^2} = -\infty$, *quindi in tali casi non esiste il limite.*

Esercizio 10. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = 8.$

Esercizio 11. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} = 1/4.$

2. Caso $x \to +\infty$. Vari esempi di limiti del tipo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

risolti per raccoglimento e dimostrazione della seguente formula generale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n < m, \\ +\infty, & \text{se } n > m \text{ e } \dfrac{a_n}{b_m} > 0, \\ -\infty, & \text{se } n > m \text{ e } \dfrac{a_n}{b_m} < 0. \end{cases}$$

Alcuni esempi con polinomi irrazionali.

Esempio 2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt{x}+x} = \sqrt{2}.$

Alcuni esempi con potenze di polinomi.

Esempio 3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^2}{x^2+x} = 4.$

Esempio 4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^6}{x^2+x} = 2^6 = 64.$

3. Caso $x \to -\infty$. Vari esempi di limiti del tipo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

risolti per raccoglimento.

Nota: se $x \to -\infty$, $x^{n-m} \to -\infty$, se $n - m$ è dispari ma $x^{n-m} \to +\infty$, se $n - m$ è pari.

4. Applicazione alla differenza di logaritmi. Vari esempi del tipo

$$\lim_{x \to +\infty} [\log P(x) - \log Q(x)].$$

Deduzione della seguente formula generale:

$$\lim_{x \to +\infty} [\log P(x) - \log Q(x)] = \begin{cases} \log a_n - \log b_m, & \text{se } n = m, \\ +\infty, & \text{se } n > m, \\ -\infty, & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Osservazione 1. *In tale caso deve essere necessariamente $a_n > 0$ e $b_m > 0$, poiché il logaritmo è definito solo per valori strettamente positivi.*