Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I

Esercizi sui limiti e la continuità

1. Svolgere gli esercizi del libro di testo relativi agli argomenti fatti (vedi registro delle lezioni).

2. Delle seguenti funzioni *elementari* disegnare il grafico e dedurne gli estremi superiore e inferiore, il massimo e il minimo (se esistono) e i limiti per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione.
$$x \mapsto x^{\alpha},\ a^{x},\ \ln(x),\ |x|,\ \sin(x),\ \tan(x),\ \arccos(x),\ \arctan(x)$$

3. Considerare le funzioni degli esercizi, proposti il 15 e il 28 settembre, di cui si è disegnato il grafico. Di esse determinare graficamente: estremo inferiore, superiore e gli eventuali massimi e minimi assoluti. Determinare inoltre i limiti per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione e in quali insiemi sono continue.

4. Usando i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$
e calcolarne i limiti per x che tende a ± 1 e $\pm\infty$

5. Delle seguenti funzioni si disegni il grafico e si determinino gli eventuali asintoti orizzontali e verticali
$$\arcsin(x+5) - \pi/4, \quad |\arcsin(x+5) - \pi/4|, \quad \ln(x-1) + 1, \quad |\ln(x-1)+1|$$
$$\cos(\pi(x+1)), \quad |\cos(\pi(x+1))|, \quad \arctan(x-1) - \pi/2, \quad |\arctan(x-1) - \pi/2|$$

6. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni
$$\arccos(x-5) - \pi/4 = k, \quad (x-1)^2 - 1 = k$$

7. Disegnare il grafico della seguente funzione, calcolarne i limiti per x che tende a ± 1 e $\pm\infty$ e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali e discontinuita'
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x < -1 \\ \arccos(x) & x \in [-1, 1] \\ \arctan(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

8. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, per tutte le funzioni f definite nei precedenti esercizi

9. Date le funzioni $f : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in (n-1, n]$, $g : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n, n+1)$, disegnarne il grafico e determinare al variare di $n \in \mathbb{Z}$
$$\lim_{x \to n^{\pm}} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to n^{\pm}} g(x)$$

10. Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Calcolare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x)$$

11. Sia $f(x) = \frac{ax^3+x^2+1}{bx^4+cx^3+x}$. Calcolare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x)$$

12. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano continue su tutto $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x+5 & x \le 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a+5 & x \le 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \le 0 \\ \sin(x+a) & x > 0 \end{cases},$$

13. Siano date le funzioni definite da

$$f_1(x) = \sqrt{x+3} - 5, \; f_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f_4(x) = \left|x^3 - 1\right| + 3, \quad f_5(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|, \quad f_6(x) = 2^{-|x+1|}$$

a. Usando i grafici delle funzioni elementari, i concetti di traslazione, simmetria e la definizione di valore assoluto, disegnarne i grafici

b. Usando i grafici disegnati determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero (e possibilmente il segno) delle soluzioni delle equazioni

$$f_i(x) = a \quad \text{per} \quad i = 1 \dots 6$$

c. Usando i grafici disegnati determinare, se esistono, i massimi e i minimi assoluti delle precedenti funzioni. Nel caso non esistano determinarne inf e sup

d. Usando i grafici disegnati determinare, se esistono, i massimi e i minimi delle precedenti funzioni sugli intervalli $[-2, 2]$, $(-2, 2)$, $[0, 3]$, $[0, 3)$

14. Determinare il segno delle seguenti funzioni trovandone il dominio, gli zeri e usando il teorema dei valori intermedi

$$(x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x\cos(x), \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}$$

15. Usando le proprieta' delle funzioni continue ed il concetto di limite dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^{37} + +3x^{10} + 1}{x^2 + 1} = k$$

ammette soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$