

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica 1

Esercizi relativi alla prima settimana di lezione (e ai prerequisiti) dell'A.A. 2006/07

1. Libro di testo: fare gli esercizi e gli esempi contenuti nel Capitolo 1, dell'Appendice fare solo la sezione A.2 Insiemi e relative operazioni.

2. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni, esprimendole tramite unioni di intervalli

$$3x + 5 \leq 3 (< 3), \quad \frac{3x + 5}{x - 7} \leq \frac{x}{x - 1}, \quad |x + 3| < 4 (\geq 4), \quad \frac{2x^2 - 4x}{x + 7} \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x + 5 \leq 3 \\ x + 7 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 5 \leq 3, \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

3. Risolvere graficamente, usando la nozione di distanza le seguenti disequazioni

$$|x - 2| \leq 3, \quad |x + 5| \geq 1, \quad |x + 5| \geq -1, \quad |x + 5| \leq -1, \quad x^2 < 1, \quad x^4 > 16, \quad |x - 1| \leq |x + 2|$$

4. Data la disequazione

$$\frac{x + 5}{x - 3} < -4,$$

per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, dandone una spiegazione teorica.

1. La disequazione è equivalente a:

i) $x + 5 < -4(x - 3)$

ii) $x + 5 > -4(x - 3)$

iii) se nessuna delle precedenti equivalenze è vera, determinarne una corretta.

2. L'insieme delle sue soluzioni è

i) un intervallo limitato

ii) un intervallo limitato e chiuso

iii) un intervallo limitato e aperto

iv) una semiretta

v) l'unione disgiunta di un intervallo limitato e di una semiretta

5. Risolvere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ le disequazioni $|x - a| \leq b (< b)$ e $|x - a| \geq |x + b|$

6. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x & x \in [-1, 1] \\ -x^2 & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 1 \\ x & x \in [1, 2] \\ 2 - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

7. Supponiamo di conoscere 3 (2) radici reali e distinte di un polinomio P di grado 4.

Cosa posso dedurre sul numero di radici reali di P ? In particolare:

Quante radici reali e distinte ha al massimo P ?

Quante radici reali contate con la loro molteplicità ha al minimo P ?

Quanti fattori di primo grado ha al minimo P ?

Quanti fattori di primo grado ha al massimo P ?

8. Supponiamo di conoscere 3 (2) radici reali e distinte di un polinomio P di grado

5. Cosa posso dedurre sul numero di radici reali di P ? In particolare:

Quante radici reali e distinte ha al massimo P ?

Quante radici reali contate con la loro molteplicità ha al minimo P ?

Quanti fattori di primo grado ha al minimo P ?

Quanti fattori di primo grado ha al massimo P ?

9. Determinare quoziente e resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 + 3 : x + 1, & \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 1 \\x^3 - 2x^2 + 3 : x^2 + 1, & \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1\end{aligned}$$

10. Senza eseguire la divisione, determinare il resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 + 3 : x + 5, & \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 3 \\x^5 + 2x^2 + 3 : x - 1, & \quad x^4 + 2x^3 + 3 : x + 1\end{aligned}$$

E' possibile eseguire lo stesso esercizio con la divisione $x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$?

10. Dimostrare che $\sqrt{7}$ e $\sqrt{6}$ non sono razionali.

11. Dare la definizione di numero primo. Dimostrare che, se q è un numero primo, allora \sqrt{q} non è razionale.

11. Dimostrare, mediante la definizione, che l'insieme dei numeri naturali divisibili per 7 è numerabile.