Analisi Matematica I - ICI
Esercizi sulle equazioni differenziali

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte. Risposte senza giustificazione non verranno ritenute valide.

1. Supponiamo che l'intensità di corrente in un circuito sia determinata dall'equazione differenziale
$$\frac{d}{dt}i\,(t) + 3i\,(t) = 4\sin(4t)\,.$$
Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) Se $i(0) = 2$ allora $i\,(t) = -\frac{16}{25}\cos(4t) + \frac{12}{25}\sin(4t) + \frac{16}{25}e^{-3t}$
   (b) Se $i(0) = 2$ allora $i\,(t) = -\frac{16}{25}\cos(4t) + \frac{12}{25}\sin(4t) + \frac{66}{25}e^{-3t}$
   (c) Se $i(0) = 2$ allora $i\,(t) = 4/3 - 2/3e^{-3t}$
   (d) Se $i(0) = 0$ allora $i\,(t) = -\frac{16}{25}\cos(4t) + \frac{12}{25}\sin(4t) + \frac{66}{25}e^{-3t}$
   (e) nessuna delle altre affermazioni è corretta

2. Supponiamo che l'intensità di corrente in un circuito sia determinata dall'equazione differenziale
$$\frac{d}{dt}i\,(t) + 4i\,(t) = 4.$$
   (a) $i(t)$ è costante se $i(0) = 5$
   (b) Se $i(0) = 5$, allora $i(1/4) = 1 - 1/2e^{-4t}$
   (c) Se $i(0) = 5$, allora $i(1/4) = 1 + 4e^{-4t}$
   (d) Se $i(0) = 5$ allora $i\,(t) = 1 - 1/2e^{-4t}$
   (e) $i(t)$ tende decrescendo a 1 se $i(0) = 1/2$
   (f) $i\,(t) = 1 - 1/2e^{-4t}$ se $i(0) = 1/2$
   (g) $i(t)$ tende crescendo a 1 se $i(0) = 5$
   (h) se $i(0) = 1/2$ allora $i(t) = 1 + 4e^{-4t}$
   (i) Se $i(0) = 5$ allora $i(t)$ tende decrescendo a 1
   (j) Se $i(0) = 1$ allora $i(t)$ è costante
   (k) Se $i(0) = 5$ allora $i(t)$ è costante

3. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale
$$\ddot{x} + 9x = -\sin(t)$$
e che al tempo 0 lo spostamento valga $x\,(0) = 0$ e la velocità valga $\dot{x}\,(0) = -1$
   a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo
   b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione
   c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

4. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale
$$\ddot{x} + 9x = -\sin(3\,t)$$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e della posizione e velocità al tempo 0

b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione

c. i può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

5. **Teorico** Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine sulla semiretta $(0, +\infty)$

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{15}{4x^2}y = 0.$$

a. Verificare che $y(x) = x^{3/2}$ e $y = x^{-5/2}$ sono soluzioni della precedente equazione

b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione

c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2$$

d. Discutere l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione con le condizioni

$$y(1) = 1, \qquad y(10) = 1$$

6. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + y = -2\tan(x).$$

a. Verificare che

$$y = 2\cos(x)\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

è soluzioni della precedente equazione

b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione

c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -3$$

d. Discutere l'esistenza e l'unicità, al variare di $a \in \mathbb{R}$ della soluzione dell'equazione con le condizioni

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = a$$

7. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 3\frac{d}{dx}y(x) + 3y(x) = 0.$$

a. Determinare la soluzione generale della precedente equazione

b. Determinare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad \mathrm{D}(y)(0) = 3$$

c. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

tende a 0 per $x \mapsto +\infty$?

8. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 4\frac{d}{dx}y(x) + y(x) = \sin(3x). \tag{1}$$

a. Determinare la soluzione generale dell' equazione omogenea associata
b. Determinare la soluzione generale dell' equazione non omogenea
c. Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \qquad \mathrm{D}(y)(0) = 3$$

d. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione delle equazioni (omogenea e non omogenea) con condizioni iniziali

$$y(0) = a, \qquad \mathrm{D}(y)(0) = b$$

tende a $-\infty$ per $x \mapsto +\infty$?

9. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$$

e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 3$

a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo
b. Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
c. Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a

$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$

decresce senza oscillare.

10. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$$

e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 2$

(a) Determinare lo spostamento in funzione del tempo
(b) Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
(c) Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a

$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$

decresce senza oscillare.