

Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Esercizi sugli integrali

1. Senza calcolare l'integrale, che non puo' essere espresso tramite funzioni elementari, determinare crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo) della funzione F definita da

$$F(x) = \int_{1/2}^x \frac{1+t^5}{\ln(t)} dt.$$

Inoltre:

- a. Spiegare perche' F è definita in 0
b. Verificare (usando la concavità della funzione logaritmo) che nell'intervallo $[1/2, 1)$

$$|(1+t^5)/\ln(t)| > 1/(1-t)$$

e dedurne (usando la monotonia dell'integrale) che $x = 1$ e' un asintoto verticale per F .

- c. Disegnare il grafico di F .

2. Considerare la funzione

$$H(x) = \int_1^{1/x} \exp(-t^2) dt$$

Si scriva H come composizione di una funzione integrale F e la funzione $x \mapsto 1/x$, inoltre

- (a) Spiegare perché il dominio di H è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Verificare che H ha un asintoto orizzontale destro e sinistro (usare il cambiamento di variabile nel limite)
(c) Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$ e disegnarne il grafico lontano dall'origine.
(d) Dopo aver verificato che $0 < \exp(-t^2) < 1/t^2$ per $|t| > 1$, usare il cambiamento di variabile nel limite e la monotonia dell'integrale per verificare che la funzione può essere estesa a 0 come funzione continua a destra. Verificare inoltre che tale funzione ha una discontinuità di salto.
(e) Disegnare il grafico di H

3. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni

$$x \cos(x), \quad xe^x, \quad \cos(3x), \quad \frac{\cos(\ln(x))}{x}, \quad x\sqrt{1-x^2}, \quad x\sqrt{1+x^2}$$

4. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x \cos(2x)$ e le rette $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

5. Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x , il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

6. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x , il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$
7. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x - 1)^2$.
8. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x \cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$
9. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici
10. Disegnare e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa i grafici delle funzioni $y = \sqrt{2 - x^2}$ e $y = 1$.
11. Disegnare il grafico di

$$f : x \mapsto \begin{cases} x \exp(-x) & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Spiegare perché f ammette primitive.
- (b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?
- (c) Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.
- (d) Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto, descrivendo al variare di $x \in \mathbb{R}$ il significato di $F(x)$ in termini di aree.
12. Studiare la funzione

$$t \mapsto \int_1^t \frac{(\cos(x) - 1)^2}{x^2} dx,$$

in particolare spiegare perché tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed ammette asintoti orizzontali (usare opportune limitazioni e la monotonia dell'integrale).

13. Spiegare perché la funzione $H : t \mapsto \int_0^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2} dx$ è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed usare il metodo di integrazione per sostituzione (o il significato geometrico dell'integrale) per dimostrare che tale funzione è pari. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)/x^n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$
14. Studiare le due funzioni

$$t \mapsto \int_1^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx, \quad t \mapsto \int_{-2}^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx.$$

In particolare si cerchi di determinare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

15. Disegnare il grafico di

$$t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$