Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Esercizi sul significato geometrico di integrale e sulle funzioni integrali

1. Calcolare, usando il significato geometrico e le proprieta' dell'integrale,

$$\int_{-4}^{1}(2+x)\,dx,\ \int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx,\ \int_{-3}^{3}\sqrt{18-2x^2}\,dx,\ \int_{-1}^{3}2+\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

2. Dopo aver disegnato la parte di piano compresa fra il grafico della funzione $y = \sin(3x)$, l'asse x e le rette di equazioni $x = \pi/4$ e $x = \pi/2$, esprimerne l'area mediante l'integrale orientato.

3. Dopo aver disegnato la parte di piano delimitata dal grafico

$$y = x^x(\ln(x) + 1),$$

l'asse x e le rette $x = 1/2$ e $x = 2$, esprimerne l'area mediante l'integrale orientato.

4. Dopo aver disegnato la parte di piano compresa fra il grafico della funzione $y = \exp(1/x) - 2$, l'asse x e le rette di equazioni $x = 1$ e $x = 10^3$, esprimerne l'area mediante l'integrale orientato.

5. Dopo aver disegnato la parte limitata di piano contenuta nel semipiano delle ascisse negative e compresa fra il grafico della funzione arctan e la retta $y = \pi x/4$, esprimerne l'area mediante l'integrale orientato.

6. Dopo aver disegnato la parte di piano delimitata dal grafico della funzione

$$y = \exp(-1/x^2),$$

la retta passante per il punto di coordinate $(1, 1/e)$ e di coefficiente angolare $m = -1$, e le rette $x = 1/2$ e $x = 2$, esprimerne l'area mediante l'integrale orientato.

7. Disegnare, per quanto possibile, il grafico delle funzioni integrali, relative a punti x_0 ammissibili scelti a piacere, delle funzioni considerate negli esercizi precedenti.

8. Senza calcolare l'integrale, disegnare per quanto possibile i grafici delle seguenti funzioni

$$\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt\ ,\ \int_{-3}^{x}\frac{1}{t}dt\ ,\ \int_{1}^{x}\frac{t-1}{1+t^2}dt\ ,\ \int_{0}^{x}\frac{t-1}{1+t^2}dt\ ,\ \int_{0}^{x}\frac{1+t^2}{t-1}dt\ ,\ \int_{2}^{x}\frac{1+t^2}{t-1}dt$$

in particolare: determinare il dominio, crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo)

9. Senza calcolare l'integrale, che non puo' essere espresso tramite funzioni elementari, determinare crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo) della funzione $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da

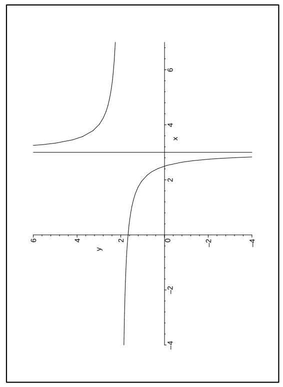
$$\int_{2}^{x}\frac{1+t^5}{\ln(t)}dt.$$

Inoltre:

a. Verificare che la parte di piano compresa fra il grafico della funzione e l'asse x contiene rettangoli di altezza $h = 1$ e base b arbitraria e dedurne che F non ha asintoti orizzontali.

b. Disegnare il grafico di F.

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico e' rappresentato dalla seguente figura, dove gli asintoti hanno equazioni $x = -1$ e $y = 3$ e le intersezioni con gli assi sono nei punti $(-0.8, 0)$ e $(0, 2.8)$



Considerare la funzione integrale $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

a. Determinare il dominio di F, indicare eventuali punti di discontinuita', punti angolosi, punti a tangente verticale o cuspidi.

b. Determinare in quali intervalli F e' crescente, decrescente, concava o convessa.

c. Spiegare perche' F non puo' avere un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

d. Disegnarne i possibili grafici di F

11. Considerare la funzione
$$H(x) = \int_0^{\cos(x)} \exp(-t^2)dt$$
Si scriva H come composizione di una funzione integrale e la funzione $\cos$. Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$.

12. Sia f la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_1^x \arccos(\ln(t))\,dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
f e' definita in $[1/e, e]$
f e' definita in $(-\pi/2, \pi/2)$
f e' definita in $\mathbb{R}$
f ha minimo negativo
f ha massimo positivo
f ha per tangente al suo grafico la retta $y = (\pi/2)(x-1)$
f e' decrescente nel suo dominio
f ha per tangente al suo grafico la retta $y - \pi/2 = (x-1)$ nel punto di ascissa 1
f e' positiva per $x > 1$ nel suo dominio
f e' negativa per $x < 1$ nel suo dominio
f e' strettamente crescente nel suo dominio
f non ha minimo
f non ha massimo
f e' positiva per $x > 0$ nel suo dominio
f e' negativa per $x > 1$ nel suo dominio

Disegnare il grafico di f

13. Sia $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $G(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
    $G'(x) = -f(x)$ in $(0,3)$
    $G'(x) = f(x)$ in $(0,3)$
    $G''(x) = f'(x)$ in $(0,3)$
    $G''(x) = -f'(x)$ in $(0,3)$
    $G'(x) = -f(x)$ in $[0,3]$
    $G''(x) = -f(x)$ in $(0,3)$

14. Sia Sia $f : (0,3) \cup (5,7) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
    $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3)$
    $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7) - \{3,5\}$
    $H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,7) - \{3,5\}$
    $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,3)$
    $H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(5,7)$
    $H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3)$
    $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3) \cup (5,7)$
    $H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3) \cup (5,7)$
    $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7)$