

ANALISI MATEMATICA II

26 MARZO 2007– PROVA SCRITTA

Svolgere tre esercizi a scelta tra i seguenti.

Esercizio 1. La temperatura $T(x, y)$ nei punti del piano xy è data da $T(x, y) = x^2 - 2y^2$.

1. Disegnare alcune linee di livello di T (isoterme).
2. In quale direzione dovrebbe muoversi una formica che si trova nella posizione $(2, -1)$ se desidera raggiungere il fresco più velocemente possibile?

Esercizio 2. La temperatura in tutti i punti del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ è data da

$$T(x, y) = (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}$$

Determinare le temperature minima e massima sul disco.

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_{\gamma} \sqrt{x} \, ds$$

dove γ è data da

$$\gamma(t) = (t^2, t \sin t, t \cos t), \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

Esercizio 4. Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = 2xydx + x^2dy$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} 6xydx + (3x^2 + x)dy$$

dove γ è il bordo del rettangolo di vertici $(0, 0)$ e $(1, 2)$ avente lati paralleli agli assi, percorso in senso orario.

Suggerimento: usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

Esercizio 5. Calcolare

$$\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy,$$

dove D è la porzione dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

compresa tra le rette di equazione $x = y$ e $x = -y$.

Esercizio 6. Calcolare la superficie del solido dato dall'intersezione del cilindro (pieno)

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1/2\}$$

Con la sfera (piena)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Durata della prova: 120 minuti — Giustificare i passaggi effettuati