

## ANALISI MATEMATICA II

20 APRILE 2007 – PROVA SCRITTA

**Svolgere tre esercizi a scelta tra i seguenti.**

**Esercizio 1.** Olivia ha preparato una torta circolare del diametro 1  $m$  distribuendovi in superficie dell'uvetta con densità data (in  $g/m^2$ ) da  $\rho(x, y) = xy - x + 2$  (il centro della torta è l'origine delle coordinate). Offre metà della torta a Poldo che, particolarmente ghiotto di uvetta deve decidere lungo quale diametro tagliare la torta in modo da ottenerne la massima quantità.

**Esercizio 2.** Siano  $\xi$  e  $\eta$  le rispettive soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = a \end{cases}$$

Posto  $m_a := \max_{x \in \mathbb{R}} (\xi(x) - \eta(x))$ , determinare il valore di  $a$  tale che  $m_a$  sia minimo (in altre parole scegliere la velocità iniziale del secondo oscillatore in modo che si allontanino il meno possibile dal primo).

**Esercizio 3.** Calcolare il gradiente della seguente funzione

$$f(x, y) = \int_0^{xy^2} e^{-t^2} dt$$

nel punto  $(1, 3)$  e calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in quel punto.

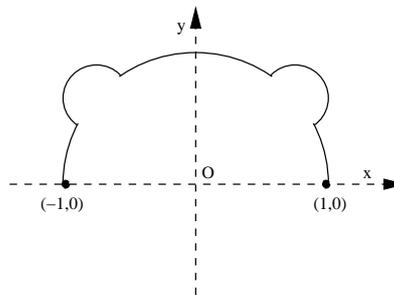
**Esercizio 4.** Determinare il valore  $\alpha_0$  del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  affinché la forma differenziale

$$\omega_\alpha(x, y) = (e^{x+y} + xe^{x+y} - y)dx + (xe^{x+y} - \alpha x)dy$$

sia esatta. Calcolare poi, per  $\alpha = \alpha_0$ , l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega_{\alpha_0}$$

dove  $\gamma$  è la curva in figura percorsa da sinistra verso destra.



**Esercizio 5.** Il tetraedro  $T$  di vertici  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  è costituito di un materiale avente densità  $\rho(x, y, z) = |x - y| + 1$ . Determinare la massa di  $T$ .

**Esercizio 6.** Giovanni vuole verniciare la parte sottostante di una scala a chiocciola. Scopre che la superficie da verniciare può essere rappresentata parametricamente dalla mappa (in un opportuno sistema di coordinate cartesiane)

$$(u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, \alpha v), (u, v) \in [0.2, 1.5] \times [0, \pi].$$

dove  $u$  è espresso in metri e  $v$  in radianti. Siccome la vernice che intende usare pesa  $200 g/m^2$ , quanta vernice (in grammi) sarà necessaria per la prima mano di verniciatura?

**Durata della prova: 120 minuti — Giustificare i passaggi effettuati**