

ANALISI MATEMATICA II

14 SETTEMBRE 2007– PROVA SCRITTA

Svolgere al più tre dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. Disegnare le curve di livello della seguente funzione

$$f(x, y) = \max \{x^2 - x, xy\}$$

e determinare l'immagine della restrizione di f al disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Esercizio 2. Determinare una rappresentazione parametrica della curva γ di intersezione delle seguenti due superfici di equazione

$$z = x^2 + y^2, \quad z = x,$$

e calcolare $\int_{\gamma} y \, ds$.

Esercizio 3. Sia $F(x, y, z) = (3x^2y - y^2 + z, x^3 - 2xy, x + 1)$ un campo vettoriale assegnato. Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva parametrizzata da

$$t \mapsto \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{\pi} \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 4a (Riservato IAT 2006/07). Determinare per quali valori di x si ha

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^n \sqrt{3n}}{2n+1} t^n = 0,$$

ed usare il risultato per determinare per quali valori di x la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{-3n} \sqrt{3n}}{2n+1}$$

converge.

Suggerimento: Usare la sostituzione $|x|^{-3} = 2t$.

Esercizio 4b (Escluso IAT 2006/07). Determinare, per ogni $a > 0$, la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} ay''(x) - 2y(x) = -\cos(x) + \frac{2}{a+2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

dopodiché, se possibile, calcolare per ogni $x > 0$ i limiti

$$\lim_{a \rightarrow 0} y_a(x), \quad \lim_{a \rightarrow -2^+} y_a(x)$$

Esercizio 5. Calcolare il volume del dominio D dato da

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 9 - x^2 - 4y^2\}.$$

Durata della prova: 120 minuti — Giustificare i passaggi effettuati