

ANALISI MATEMATICA II

13 LUGLIO 2007– PROVA SCRITTA

Svolgere 3 dei seguenti esercizi

Esercizio 1. Date le funzioni

$$f(x, y) = \max \{x, |y^2 - x|\} \quad g(x, y) = \min \{x, |y^2 - x|\}.$$

Determinare il minimo di f ed il massimo di g nel dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Esercizio 2. Determinare una soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 4e^{2x} - 2x, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Calcolare la lunghezza della curva di $\mathbb{R}^2$ rappresentata parametricamente da:

$$t \mapsto (t \cos t, t \sin t), \quad t \in [0, \pi] \quad (\text{Spirale di Archimede})$$

Esercizio 4. Calcolare il centro di massa di una lamina piana avente la forma di un semidisco di raggio 3, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, la cui densità varia secondo la legge $\rho(x, y) = \sqrt{16 - y^2}$.

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D xy + x^2 dx dy,$$

con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq (x - 1)^2\}.$$

Durata della prova: 2 ore. Giustificare tutte le risposte fornite!