Facoltà di Ingegneria -- Corsi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio & Ingegneria Ambiente e Risorse

Analisi Matematica II

28 giugno 2007– Prova scritta

Svolgere tre esercizi a scelta tra i seguenti.

Esercizio 1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = 3x + \frac{y}{2}$$

definita nell'intersezione dei semipiani $x \geq 0$, $y \geq x - 1$ e $y \leq 1 - x$

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y \leq 4\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 4\}.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x^3 + 3xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1\}$, utilizzando la trasformazione di coordinate

$$x(\rho,\theta) = \sqrt{3}\,\rho\cos\theta, \quad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

specificando per ogni valore di $a \neq 0$ il dominio della soluzione trovata.

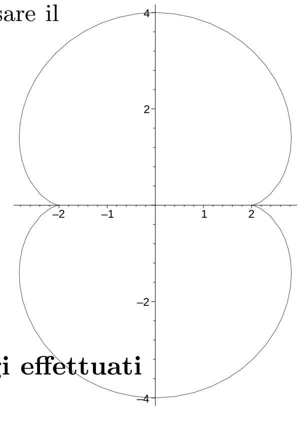
Esercizio 4. Considerata la curva $t \mapsto \gamma(t)$ data da

$$\gamma(t) = \big(3\cos t - \cos(3t), 3\sin t - \sin(3t)\big), \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

determiare l'area della parte D di piano racchiusa dalla curva.

Suggerimento: La curva γ è rappresentata nella figura a fianco. Usare il fatto che, se $k \neq n$ sono numeri interi, allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(kt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(kt)\mathrm{d}t = 0.$$



Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati