Facoltà di Ingegneria - CDL in Ingegneria per l'Ambiente e le Risorse

Analisi Matematica II

24 Agosto 2007– Prova scritta

Svolgere al più tre dei seguenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x,y)=\frac{y\sin(2x^2-y-\pi)}{x^2-\frac{y}{2}+\pi}$$

alla parabola di equazione $y=2x^2+\pi$.

Esercizio 2. Disegnare il solido

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 4\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\le 16\right\}$$

e calcolarne il volume V.

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\oint_\gamma \frac{y}{|x|+|y|}\mathrm{d}x-\frac{x}{|x|+|y|}\mathrm{d}y$$

dove γ è il bordo (percorso una sola volta, in senso orario) dell'insieme

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|\le 2\}$$

Esercizio 4a (Riservato IAT 2006/07). Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{3n}}{2n+1}t^n,$$

ed usare il risultato per determinare per quali valori di x la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{-n}\sqrt{3n}}{2n+1}$$

converge.
Suggerimento: Usare la sostituzione $|x|^{-1}=2t$.

Esercizio 4b (Escluso IAT 2006/07). Risolvere per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'=2xy+\alpha y,\\ y(0)=2.\end{cases}$$

Sia $y_\alpha(x)$ la soluzione, determinare α affinché $y_\alpha(1)=0$.

Esercizio 5. Si consideri, per ogni $a\in\mathbb{R}$, la funzione

$$f_a(x,y)=ax^3-2y^2-ax+2a^2y.$$

Dopo avere verificato che il punto $(1,0)$ appartiene all'insieme

$$L_0(f_a)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f_a(x,y)=0\}$$

per ogni $a\in\mathbb{R}$, determinare per quali valori di $a\neq 0$ (se esistono), $L_0(f_a)$ risulta perpendicolare alla retta di equazione $x-y=1$ nel punto $(1,0)$.

Durata della prova: 90 minuti — Giustificare i passaggi effettuati